Übungen zur Theoretischen Physik F SS 08

Prof. Dr. P. Wölfle
Dr. M. Greiter

Blatt 4
Besprechung 13.05.08

---

1. Ideales Boltzmann-Gas (3 Punkte)

Ein Gas aus N freien Punktteilchen der Masse m befindet sich im Volumen $V = L^3$. Die Teilchen sollen quantenmechanisch, aber als unterscheidbar behandelt werden, wobei periodische Randbedingungen an die Eigenzustände eines Teilchens gestellt werden.

(a) Geben Sie die Mikrozustände $\{\alpha\}$ der kanonischen Gesamtheit mit Temperatur T an, und berechnen Sie die Zustandssumme $Z(T, V, N)$ im thermodynamischen Limes. (1 Punkt)

(b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsverteilung $\rho(\mathbf{p})$ aus der Wahrscheinlichkeit

$$\rho(\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3p = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\langle\, \delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}_i(\alpha)}\,\rangle$$

ein Teilchen im Impulsraumelement d^3p zu finden, wobei $\mathbf{p}_i(\alpha)$ der Impuls des Teilchens Nr. i im Mikrozustand α ist. (2 Punkte)

2. Ideales Gas aus zweiatomigen Molekülen (5 Punkte)

Ein ideales Gas aus N Molekülen befindet sich in einem Volumen V (in drei Raumdimensionen). Jedes Molekül besitzt Schwingungs-, Rotations- und Translationsfreiheitsgrade. Das Gas ist an ein Wärmebad der Temperatur T angekoppelt (kanonische Gesamtheit).

(a) Betrachten Sie zunächst ausschließlich die Schwingungsfreiheitsgrade des Gases. Die Energie eines Moleküls ist dann gegeben durch

$$E_n^{osz} = \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Wodurch sind die Mikrozustände $\{\alpha\}$ der Schwingungsbewegung des Gases festgelegt? Berechnen Sie die zugehörige kanonische Zustandssumme Z^{osz}, die innere Energie U^{osz} und daraus die spezifische Wärme

$$c_V^{\mathrm{osz}} = \left(\frac{\partial U^{\mathrm{osz}}}{\partial T}\right)_{V,N}$$

Bestimmen Sie asymptotische Ausdrücke von c_V^{osz} für $T \to 0$ und $T \to \infty$.
(2 Punkte)

(b) Betrachten Sie nun ausschließlich die Rotationsfreiheitsgrade. Die Energie eines Moleküls ist jetzt durch seinen Bahndrehimpuls $\mathbf{L}^2 = l(l+1)$ gegeben,

$$E_l^{\mathrm{rot}} = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1), l = 0, 1, 2, \ldots$$

wobei $I = \mathrm{const.}$ das Trägheitsmoment ist. Geben Sie die Mikrozustände $\{\alpha\}$ für diesen Fall an (Entartung!). Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme Z^{rot} näherungsweise für kleine Temperaturen $kT \ll \frac{\hbar^2}{2I}$, und daraus U^{rot} und c_V^{rot}.

Bestimmen Sie nun Z^{rot} und daraus c_V^{rot} im Limes $T \to \infty$. (2 Punkte)

(c) Betrachten Sie nun ausschließlich die Translationsbewegung. Geben Sie U^{trans} und c_V^{trans} an.

Schließlich seien *alle* Freiheitsgrade des Gases zugelassen. Begründen Sie, dass

$$c_V = c_V^{\mathrm{osz}} + c_V^{\mathrm{rot}} + c_V^{\mathrm{trans}}$$

(1 Punkt)

3. Ideales Fermi-Gas (2 Punkte)

Wir betrachten N freie fermionische Punktteilchen der Masse m, die auch einen Spin 1/2 besitzen. Diese befinden sich in einem Volumen $V = L^3$, mit periodischen Randbedingungen für die Wellenfunktionen. Es sei $T = 0$.

Berechnen Sie die Fermi-Energie $\varepsilon_F(V, N)$ auf zwei Wegen:
(i) über die Zustandsdiche $\mathcal{N}(\varepsilon)$ (siehe Aufgabe 3b von Blatt 3), und
(ii) über das Volumen der Fermi-Kugel.