Universität Karlsruhe

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 08

Prof. Dr. P. Wölfle

Dr. M. Greiter

Blatt 5

Besprechung 20.05.08

---

1. Großkanonische Gesamtheit (3 Punkte)

Wir betrachten ein Gas aus freien Punktteilchen der Masse m in einem Volumen $V = L^3$. Die Dispersion eines Teilchens lautet

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

Die Teilchen sollen keinen Spin besitzen. Das Gas ist an ein Wärme- und Teilchenbad mit Temperatur T und chemischem Potential μ gekoppelt (großkanonische Gesamtheit).

(a) Die Teilchen seien *Bosonen* oder *Fermionen*. Geben Sie jeweils die Mikrozustände an, sowie die Ausdrücke für $Z_G(T, V, \mu)$, $U(T, V, \mu)$, $N(T, V, \mu)$.

Drücken Sie $U(T, V, \mu)$ und $N(T, V, \mu)$ auch mit Hilfe der Zustandsdichte $\mathcal{N}(\varepsilon)$ aus (vgl. Blatt 3, Aufgabe 3). (2 Punkte)

(b) In der Regel ist man an der kanonischen Gesamtheit interessiert, es sollen sich also genau N Teilchen in V befinden. Wie würden Sie $U(T, V, N)$ für *Bosonen* und *Fermionen* berechnen?

Wie würden Sie $U(T, V, \mu)$ und $U(T, V, N)$ für den Fall berechnen, dass die Teilchen *unterscheidbar* sind (Boltzmann-Gas)? (1 Punkt)

2. Chemisches Potential im idealen Bose-Gas (4 Punkte)

N freie *Bosonen* befinden sich im Volumen $V = L^3$. Das chemische Potential $\mu(T, V, N)$ soll bestimmt werden:

(a) Für hohe Temperaturen darf $-\mu \gg kT$ angenommen werden (warum?). Berechnen Sie für diesen Fall näherungsweise $N(T, V, \mu)$ und daraus $\mu(T, V, N)$, $U(T, V, N)$ und $c_V(T, V, N)$.

(b) Betrachten Sie $N(T, V, \mu)$ für beliebige T, und zeigen Sie graphisch (unter Verwendung der Zustandsdichte), dass es eine Temperatur T_0 geben muß, unterhalb derer *Bose-Kondensation* vorliegt. Wie verläuft $\mu(T, V, N)$ für $0 \leq T \leq T_0$? Bestimmen Sie T_0 als Funktion von N/V.

Hinweis: Zeta-Funktion:

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{x^{z-1}}{e^x - 1}, \quad \Gamma(z) = \text{Gamma-Funktion}.$$

(c) Nun sei $T > T_0$, aber der Parameter $\delta t = (T - T_0)/T_0 > 0$ ist klein, $\delta t \ll 1$. Berechnen Sie $N(T, V, \mu)$ und daraus $\mu(T, V, N)$ in führender Ordnung δt.

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz

$$N(T,\mu) = N(T,0) + \Delta N(T,\mu) \;\Rightarrow\; \Delta N(T,\mu) = N(T,\mu) - N(T,0).$$

Berechnen Sie ΔN mit der Näherung: $g(E) \approx \frac{kT}{E}$, mit $E = \varepsilon, (\varepsilon - \mu)$.

Warum ist diese Näherung möglich?

(d) Bestimmen Sie T_0 für ein zweidimensionalen Bose-Gas aus N Teilchen in einem "Volumen" $V = L^2$.

(je 1 Punkt)

3. Pauli-Suszeptibilität (3 Punkte)

Ein Gas aus N freien *Fermionen* befindet sich im Volumen $V = L^3$. Die Teilchen besitzen Spin 1/2, und im Magnetfeld lautet die Dispersion (in geeigneten Einheiten für B)

$$\varepsilon_\sigma(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - B\sigma,$$

wobei $\sigma = +1, -1$ den Spinzustand des Teilchens angibt.

(a) Zeigen Sie über das großkanonische Potential $\Omega(T,V,\mu,B)$, dass die Magnetisierung

$$M = -\frac{\partial \Omega}{\partial B}$$

gegeben ist durch

$$M(T,V,\mu,B) = V \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\varepsilon \mathcal{N}(\varepsilon)[f(\varepsilon - \mu - B) - f(\varepsilon - \mu + B)].$$

(2 Punkte)

(b) Berechnen Sie daraus die kanonische Suszeptibilität

$$\chi(T,V,N) = \lim_{B\to 0} \left(\frac{\partial M}{\partial B}\right)_{T,V,N}$$

für $T = 0$. Geben Sie χ als Funktion von N, V an. (1 Punkt)

Hinweis: Führen Sie eine partielle Integration in $\chi(T,V,\mu)$ aus.