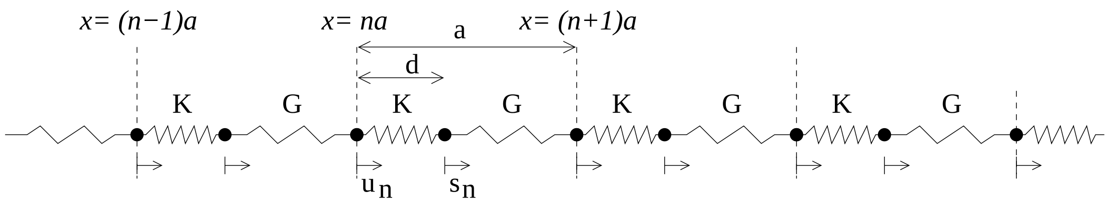
Übungen zur Theoretischen Physik F SS 08

Prof. Dr. P. Wölfle
Dr. M. Greiter

Blatt 6
Besprechung 27.05.08

1. Harmonische Kette (4 Punkte)

$2N$ identische Massen m können sich auf der x-Achse reibungsfrei bewegen und sind abwechselnd mit unterschiedlichen Federn $K > G$ verbunden:



Es sollen die klassischen Bewegungsgleichungen für kleine Auslenkungen u_n und s_n aus den jeweiligen Ruhelagen bei $x = na$ und $x = (na + d)$ gelöst werden. Die Lagrange-Funktion lautet

$$\mathcal{L}(u_n, s_n, \dot{u}_n, \dot{s}_n) = T - U, \quad \text{wobei} \quad U = \frac{K}{2}\sum_n (u_n - s_n)^2 + \frac{G}{2}\sum_n (u_{n+1} - s_n)^2,$$

(a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen. Zeigen Sie dann für den Ansatz

$$u_n(t) = u\, e^{i(kx-\omega t)}, \quad s_n(t) = s\, e^{i(kx-\omega t)}, \quad x = na,$$

dass periodische Randbedingungen

$$u_{n+N}(t) = u_n(t), \quad s_{n+N}(t) = s_n(t)$$

auf die Einschränkung

$$k = \frac{2\pi}{a}\frac{m}{N}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

führen, und dass für eine eindeutige Lösung $-\frac{\pi}{a} < k \leq \frac{\pi}{a}$ gelten muß.

(b) Bestimmen Sie nun die Frequenzen $\omega_+(k)$, $\omega_-(k)$ der Eigenmoden der Kette, geben Sie jeweils auch s/u an. Wie verhalten sich $\omega_\pm(k)$ und s/u für kleine $|k| \ll \pi/a$? Was bedeutet das Ergebnis anschaulich? Skizzieren Sie $\omega_\pm(k)$ für alle erlaubten k. Wie viele akustische $(-)$ und optische $(+)$ Eigenmoden besitzt die Kette?

(je 2 Punkte)

2. Zustandsdichte der Eigenmoden (3 Punkte)

(a) Eine brauchbare Näherung für akustische Moden ist $\omega_-(k) = c\,|k|$, $\omega_+(k) = \omega_0 =$ const.

Berechnen Sie damit die Zustandsdichten

$$D_\pm(\omega) = \overline{\sum}_k \delta(\omega - \omega_\pm(k))$$

als Funktion von c, ω_0. Die $\overline{\sum}_k$ umfaßt nur die erlaubten k-Werte aus Aufgabe 1. (1 Punkt)

(b) Für ein dreidimensionales Kristallgitter mit insgesamt N Elementarzellen, die jeweils 2 Massen enthalten gelte

$$\omega_-^s(\mathbf{k}) = c\,|\mathbf{k}|, \quad \omega_+^s(\mathbf{k}) = \omega_0, \quad s = 1,2,3$$

mit

$$-\frac{\pi}{a} < k_i \leq \frac{\pi}{a}, \quad i = x,y,z, \quad k_i = \frac{2\pi}{L} m_i, \quad m_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad L^3 = N\,a^3.$$

Berechnen Sie damit die Zustandsdichten

$$D_\pm(\omega) = \overline{\sum}_{\mathbf{k}} \sum_s \delta(\omega - \omega_\pm(\mathbf{k}))$$

für kleine Frequenzen $\omega \ll c/a, \omega_0$. (2 Punkte)

3. Phononen (3 Punkte)

Die klassischen Eigenmoden der Kette bzw. des Kristalls werden nun als unabhängige, unterscheidbare, quantenmechanische harmonische Oszillatoren aufgefaßt.

(a) Geben Sie die kanonische Zustandssumme Z an, und bestimmen Sie die innere Energie U als Funktion der Zustandsdichten $D_\pm(\omega)$. Worin besteht der Unterschied zum idealen Bose-Gas? (2 Punkte)

(b) Berechnen Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus Aufgabe 2 die spezifische Wärme

$$c_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

für kleine Temperaturen $kT \ll \hbar c/a, \hbar\omega_0$ für Kette und Kristall. (1 Punkt)