

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 08

PROF. DR. P. WÖLFLE
DR. M. GREITERBlatt 8
Besprechung 10.06.08

1. Boltzmann-Gleichung in Relaxationszeitnäherung (7 Punkte)

In einem Metall (Volumen V) befinden sich N nicht-wechselwirkende Elektronen (Masse m , Ladung $-e$, Spin $1/2$) mit Dispersion $\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m}$. Im Gleichgewicht (großkanonische Gesamtheit mit T, μ) lautet die Boltzmannsche Verteilungsfunktion $f(\mathbf{p}, \mathbf{r})|_{Gl.} = f^0 = [e^{(\varepsilon(\mathbf{p}) - \mu)/kT} + 1]^{-1}$. Wird das Gleichgewicht durch ein zeitunabhängiges elektrisches Feld $\mathbf{E}$, einen Gradienten ∇T oder $\nabla \mu$ gestört, so ist $f(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ bestimmt durch die Boltzmann-Gleichung

$$\left[\frac{\mathbf{p}}{m} \nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) - e \mathbf{E} \nabla_{\mathbf{p}} f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \right] = I, I = -\frac{1}{\tau} [f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) - f^0]$$

$1/\tau$ ist die Streurrate der Elektronen durch Störstellen im Metall.

Im Folgenden betrachten wir die Teilchendichte

$$n(\mathbf{r}) = 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} f(\mathbf{p}, \mathbf{r}),$$

die elektrische Stromdichte

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -2e \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\mathbf{p}}{m} f(\mathbf{p}, \mathbf{r}),$$

und die Wärmestromdichte

$$\mathbf{j}_Q(\mathbf{r}) = 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\mathbf{p}}{m} [\varepsilon(\mathbf{p}) - \mu] f(\mathbf{p}, \mathbf{r}).$$

(a) Zeigen Sie, daß im Gleichgewicht gilt:

$$\mathbf{j}^0(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{j}_Q^0(\mathbf{r}) = 0, \quad n^0(\mathbf{r}) = N/V.$$

(1 Punkt)

(b) In Gegenwart äußerer Felder ist nun $f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = f(\mathbf{p}, T(\mathbf{r}), \mu(\mathbf{r}))$. Bestätigen Sie, dass in *linearer Ordnung* in $\mathbf{E}$, ∇T , und $\nabla \mu$ gilt:

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = f^0 + \frac{\mathbf{p}}{m} \left[-e \mathbf{E} - \nabla \mu - \frac{\varepsilon(\mathbf{p}) - \mu}{T} \nabla T \right] \tau \left(-\frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon} \right) \Big|_{\varepsilon=\varepsilon(\mathbf{p})}.$$

(2 Punkte)

- (c) Die elektrische Leitfähigkeit σ ist definiert über $j = \sigma E$ für $\nabla T = \nabla \mu = 0$. Wir betrachten $\mathbf{j}, \mathbf{E} \parallel \mathbf{e}_z$. Berechnen Sie j mit Hilfe von (b), und zeigen Sie für $T \rightarrow 0$:

$$\sigma = n^0 e^2 \tau / m \quad (\text{Drude-Leitfähigkeit})$$

(2 Punkte)

- (d) Die thermische Leitfähigkeit K folgt aus $j_Q = -K \nabla T$ für $\mathbf{E} = \nabla \mu = 0$. Es sei $\mathbf{j}_Q, \nabla T \parallel \mathbf{e}_z$. Berechnen Sie j_Q in führender Ordnung T , und zeigen Sie:

$$K = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k}{e} \right)^2 \sigma T \quad (\text{Wiedemann-Franz-Gesetz})$$

Hinweise:

$$\int d\varepsilon A(\varepsilon) \left(-\frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon} \right) = A(\mu) + A''(\mu) \frac{\pi^2}{6} (kT)^2, \quad \mu(T) = \varepsilon_F + (\sim T^2)$$

Verwenden Sie die Zustandsdichte. (2 Punkte)

2. Ising-Modell

(3 Punkte)

Das Ising-Modell zweier wechselwirkender Spins 1/2 auf Gitterplätzen 1 und 2 in einem äußeren Magnetfeld $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z$ lautet (in geeigneten Einheiten)

$$\hat{H} = -J \hat{S}_1^z \hat{S}_2^z - B(\hat{S}_1^z + \hat{S}_2^z)$$

- (a) Bestimmen Sie die Eigenzustände und -energien von $\hat{H}$, und damit die kanonische Zustandssumme $Z_K(T, B)$.
- (b) Berechnen Sie die Magnetisierung

$$M(T, B) = \langle \hat{S}_1^z + \hat{S}_2^z \rangle$$

und die Suszeptibilität

$$\chi(T) = \lim_{B \rightarrow 0} \frac{\partial M}{\partial B}.$$

Wie verläuft $\chi(T)$ für $kT \ll J$ bzw. $kT \gg J$?

- (c) Alternative Methode zur Berechnung der Suszeptibilität: Zeigen Sie zunächst:

$$\chi(T) = \frac{1}{kT} \langle (\hat{S}_1^z + \hat{S}_2^z)^2 \rangle \Big|_{B=0}$$

Berechnen Sie für $B = 0$ den Erwartungswert $\langle (\dots)^2 \rangle$ und damit $\chi(T)$.

(je 1 Punkt)