

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 08

PROF. DR. P. WÖLFLE
DR. M. GREITERBlatt 9
Besprechung 17.06.08

1. Ising-Modell mit Nächster-Nachbar-Wechselwirkung (6 Punkte)

Wir betrachten das Ising-Modell für N wechselwirkende Spins $1/2$ mit $\hat{S}_z|\sigma\rangle = \frac{\hbar}{2}\sigma|\sigma\rangle$, $\sigma = +1, -1$. Die Spins sind auf einem quadratischen Gitter angeordnet, jeder Gitterplatz hat z nächste Nachbarn. In einem Mikrozustand $\alpha = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_N)$ sind Energie E_α und Magnetisierungsdichte m_α gegeben durch

$$E_\alpha = -\frac{J}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=(n.N.i)} \sigma_i \sigma_j, \quad m_\alpha = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i, \quad (n.N.i) \equiv \text{nächster Nachbar von } i$$

$J > 0$ bezeichnet die Wechselwirkungskonstante.

(a) *Näherung von Bragg und Williams (1934):*

Setzen Sie

$$\sigma_l = (m_\alpha + \Delta\sigma_l), \quad \Delta\sigma_l := (\sigma_l - m_\alpha), \quad l = \text{beliebiger Gitterplatz}$$

in E_α ein, und zeigen Sie dass

$$E_\alpha = -N \frac{J}{2} z m_\alpha^2$$

falls man alle Fluktuationsterme $\sim \Delta\sigma_i \Delta\sigma_j$ vernachlässigt.

(b) Bestimmen Sie die Entropie $S(E, m, N) = k \ln(\Omega)$ des *mikrokanonischen* Ensembles für fest gewählte E, m, N in der Näherung aus (a).

Hinweis:

$$m = M/N, \quad M = (N_+ - N_-), \quad N = (N_+ + N_-)$$

Verwenden Sie die Stirling Formel, z.B. $\ln(N_+!) \simeq N_+ \ln(N_+) + N_+$.

(c) Bestimmen Sie die freie Energie $F(T, m, N)$, und daraus eine Gleichung für die Magnetisierung $m = m(T, N)$ im thermodynamischen Gleichgewicht. Zeigen Sie, daß unterhalb einer Temperatur T_c eine *spontane Magnetisierung* existiert, d.h. $T < T_c : m \neq 0$, und bestimmen Sie T_c .

Hinweis:

$$F(T, m, N) = N \left(-\frac{J}{2} z m^2 + kT \frac{1+m}{2} \ln \frac{1+m}{2} + kT \frac{1-m}{2} \ln \frac{1-m}{2} \right).$$

(je 2 Punkte)

2. Ising-Modell mit unendlich langreichweitiger Wechselwirkung (4 Punkte)

Nimmt man an, daß die Wechselwirkung J jeden Spin mit jedem anderen auf dem Gitter verbindet, so lauten Energie und Magnetisierungsdichte im Mikrozustand $\alpha = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$:

$$E_\alpha = -\frac{J}{2N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_i \sigma_j - h \sum_{i=1}^N \sigma_i, \quad m_\alpha = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i.$$

h ist ein äußeres Magnetfeld.

- (a) Betrachten Sie die Zustandssumme $Z_K(T, h, N)$ der *kanonischen* Gesamtheit, und zeigen Sie: Für das Schwankungsquadrat $\langle (\Delta m)^2 \rangle$ mit $\Delta m_\alpha = (m_\alpha - \langle m \rangle)$ folgt $\langle (\Delta m)^2 \rangle \propto \frac{1}{N}$, und daher kann für $N \rightarrow \infty$ die Energie geschrieben werden als

$$E_\alpha = -\tilde{h} \sum_{i=1}^N \sigma_i + \tilde{E}_0$$

Wie lauten das effektive Magnetfeld $\tilde{h}$ und die Konstante $\tilde{E}_0$? (3 Punkte)

- (b) Gewinnen Sie nun eine Gleichung für $\langle m \rangle(T, N)$ aus der kanonischen Zustandssumme, und zeigen Sie, dass für $T < T'_c$ eine spontane Magnetisierung existiert. Bestimmen Sie die Übergangstemperatur T'_c . (1 Punkt)