

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 08PROF. DR. P. WÖLFLE
DR. M. GREITER**Blatt 11**
Besprechung 01.07.08**1. Phasenübergang 2. Ordnung**

(3 Punkte)

Im Übungsblatt 10 wurde die Molekularfeldtheorie eines antiferromagnetischen Heisenberg-Modells für N Spins der Länge S gerechnet. Aus den Ergebnissen folgt das freie Energiefunktional für den Ordnungsparameter $\overline{m}$

$$F(\overline{m}) = N \left[\frac{1}{2} z J (\overline{m})^2 - k_B T \ln(Z_1) \right], \quad Z_1 = \sum_{m=-S}^S \exp \left(\frac{z J \overline{m}}{k_B T} m \right).$$

z ist die Koordinationszahl des Gitters, J die Wechselwirkungsenergie.

- (a) In der Nähe des Phasenübergangs ist $\overline{m} \simeq 0$. Zeigen Sie durch Reihenentwicklung bis zur Ordnung $\sim \overline{m}^4$, daß man für $T \simeq T_N$ ein Landau-Funktional erhält,

$$F(\overline{m}) = N z J \left[\frac{1}{2} \frac{T - T_N}{T_N} (\overline{m})^2 + \frac{1}{4} b (\overline{m})^4 - \frac{S(S+1)}{3} \ln(2S+1) \right]$$

und bestimmen Sie die Konstanten T_N und b . (2 Punkte)

- (b) Skizzieren Sie $F(\overline{m})$ für $T > T_N$ und $T < T_N$, und berechnen Sie $\overline{m}(T)$. (1 Punkt)

2. Phasenübergang 1. Ordnung

(4 Punkte)

In einem ferroelektrischen Kristall entsteht unterhalb einer Übergangstemperatur T_c eine spontane Verzerrung γ der Einheitszelle, verbunden mit einem Dipolmoment $\mathbf{P}$. Das Landau-Funktional für die beiden Ordnungsparameter $\eta = |\mathbf{P}|^2$ und γ lautet

$$F(\eta, \gamma) = a(T - T_0)\eta + b\eta^2 + c\eta^3 + d\gamma\eta + \frac{g}{2}\gamma^2$$

wobei $T_0, a, b, c, d, g > 0$, $\tilde{b} = (\frac{d^2}{2g} - b) > 0$.

- (a) Bestimmen Sie den Gleichgewichtswert $\gamma = \gamma(\eta)$ und damit das Funktional $F(\eta)$. Skizzieren Sie den Verlauf von $F(\eta)$ für verschiedene Temperaturen T , und begründen Sie, daß ein Phasenübergang 1. Ordnung auftreten kann. (1 Punkt)
- (b) Berechnen Sie die kritische Temperatur T_c , bei der dieser Übergang stattfindet. Bestimmen Sie näherungsweise $\eta(T)$ und $\gamma(T)$ in der Nähe von T_c . (2 Punkte)

(c) Berechnen Sie die Entropie

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{T_0, a, b, \dots}$$

für T unmittelbar oberhalb bzw. unterhalb T_c . Bestimmen Sie die latente Wärme $Q_l = T \Delta S$ des Phasenübergangs. (1 Punkt)

3. Gas harter Kugeln in einer Dimension

(3 Punkte)

N harte Kugeln der Masse m mit Radius r können sich auf der x -Achse im Intervall $[-r, L+r]$ frei bewegen, aber nicht durchdringen. Die klassische Hamiltonfunktion lautet

$$\mathcal{H}(\{p_i, x_i\}) = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + V(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

mit

$$V = \begin{cases} \infty & \text{falls } \exists i, j \text{ mit } |x_i - x_j| \leq 2r \\ \infty & \text{falls } \exists i \text{ mit } x_i < 0 \text{ oder } x_i > L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{Begrenzung durch "Volumen"})$$

Die x_i bezeichnen die Kugelmittelpunkte.

- (a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme $Z_K^{\text{kl}}(T, L, N)$ im klassischen Grenzfall. (Das Potential V führt auf eine Einschränkung der Integrationsgrenzen in den $\int dx_i$. Die Integrale dx_i können durch geeignete Substitutionen gelöst werden.) (2 Punkte)
- (b) Berechnen Sie nun die freie Energie $F(T, L, N)$ und den Druck

$$p = - \left(\frac{\partial F}{\partial L} \right)_{T, N}$$

Wie lautet die Zustandsgleichung? (Stirling-Formel.) (1 Punkt)