

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 09

PROF. DR. A. SHNIRMAN
DR. S. RACHEL

Blatt 4
Besprechung 19.5.2009

1. Gaußverteilung für mehrere Variablen:

(5 Punkte)

Die Gaußverteilung $\rho(\xi_1, \dots, \xi_M)$ für die stochastischen Variablen $\xi_1, \dots, \xi_M$ sei definiert durch

$$\rho(\xi_1, \dots, \xi_M) = \sqrt{\frac{\det(\mathbf{A})}{(2\pi)^M}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^M \xi_i A_{ij} \xi_j\right) \quad (1)$$

Beweisen Sie die Beziehung (β sei eine reelle Konstante)

$$\left\langle \exp\left(i\beta \sum_{k=1}^M \xi_k\right) \right\rangle = \exp\left(-\frac{\beta^2}{2} \sum_{i,j=1}^M \langle \xi_i \xi_j \rangle\right). \quad (2)$$

Hinweis: Betrachten Sie die charakteristische Funktion

$$\phi(\lambda_1, \dots, \lambda_M) = \langle e^{i \sum_{j=1}^M \lambda_j \xi_j} \rangle = \int d\xi_1 \dots d\xi_M e^{i \sum_{j=1}^M \lambda_j \xi_j} \rho(\xi_1, \dots, \xi_M)$$

und führen Sie dann eine quadratische Ergänzung durch. Da ρ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, muss diese normiert sein, d.h. $\int dx_1 \dots dx_M \rho(x_1, \dots, x_M) = 1$. Es ist hilfreich, die Inverse der Matrix A_{ij} einzuführen: $G_{ij} = [A^{-1}]_{ij}$. In der Vorlesung haben sie gelernt, dass A symmetrisch und positiv definit sein muss. Aus $A_{ij} = A_{ji}$ folgt dann auch $G_{ij} = G_{ji}$. Der Zusammenhang zwischen ϕ und den Momenten lässt sich für mehrdimensionale Verteilungen leicht verallgemeinern:

$$\langle \xi_i^\mu \xi_j^\nu \rangle = \frac{1}{i^{\mu+\nu}} \frac{d^{\mu+\nu}}{d\lambda_i^\mu d\lambda_j^\nu} \phi(\lambda_1, \dots, \lambda_M) \Big|_{\lambda_1=\dots=\lambda_M=0}.$$

2. Gaußverteilung für zeitabh. stochastische Variablen: (2 + 3 + 3 = 8 Punkte)

Um einen Zusammenhang zwischen dem Resultat von Aufgabe 1 und Physik herzustellen, wollen wir nun eine zeitabhängige stochastische Variable $\xi(t)$ im Zeitintervall $[0, \tau]$ betrachten. Man sagt, $\xi(t)$ sei Gauß-verteilt, wenn die Verteilungsfunktion für die Funktion $\xi(t)$ durch

$$\rho(\{\xi(t)\}) \sim \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' \xi(t) g^{-1}(t-t') \xi(t')\right). \quad (3)$$

gegeben ist.

- (a) Um eine Interpretation für obige Verteilungsfunktion zu finden, diskretisieren Sie die Zeit in M Zeitintervalle Δt . Bringen Sie die diskretisierte Verteilungsfunktion in die Form der Gleichung (1).
- (b) Berechnen Sie den Mittelwert

$$\left\langle \exp \left(i \int_0^\tau dt \xi(t) \right) \right\rangle, \quad (4)$$

indem Sie die diskretisierte Version benutzen und danach das Ergebnis wieder durch kontinuierliche Integrale ausdrücken.

- (c) Berechnen Sie $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle$. Finden Sie daraus eine physikalische Interpretation für die Größe $g(t - t')$. Unter welchen Umständen ist die Diskretisierung der Zeit eine gute Näherung?

3. Stationäre Lösung der Liouville-Gleichung:

(2 Punkte)

Betrachten Sie eine Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\mathbf{x}, t)$, wobei $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Zeigen Sie nun mit Hilfe der klassischen Liouville-Gleichung, dass eine Gibbs-Verteilung ρ , die nur über die Energie von $\mathbf{x}$ abhängt, stationär ist,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(H(\mathbf{x})) = 0 .$$