

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 09

PROF. DR. A. SHNIRMAN
DR. S. RACHEL

Blatt 5
Besprechung 26.5.2009

1. Statistische Gesamtheiten:

(2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Es sollen ganz allgemein die mikrokanonische Gesamtheit (unabhängige Variablen U, N, V), die kanonische (T, N, V) und die großkanonische Gesamtheit (T, μ, V) betrachtet werden. In der kanonischen Gesamtheit ist die innere Energie durch einen Mittelwert $U = \langle E \rangle$ gegeben, in der großkanonischen Gesamtheit auch die Teilchenzahl, $N = \langle N \rangle$.

- (a) Kanonisch: Geben Sie die Definition von $\langle E \rangle$ an, und drücken Sie das Schwankungsquadrat

$$\langle (\Delta E)^2 \rangle = \langle E^2 \rangle - (\langle E \rangle)^2$$

durch eine geeignete thermodynamische Ableitung von U aus.

- (b) Großkanonisch: Geben Sie die Definition von $\langle N \rangle$ an, und drücken Sie

$$\langle (\Delta N)^2 \rangle = \langle N^2 \rangle - (\langle N \rangle)^2 \quad \text{und} \quad \langle (\Delta E)^2 \rangle$$

durch geeignete Ableitungen von N, U aus.

- (c) Begründen Sie durch Betrachtung der Schwankungen $\langle (\Delta e)^2 \rangle$ und $\langle (\Delta n)^2 \rangle$ der Dichten ($e = E/V, n = N/V$):

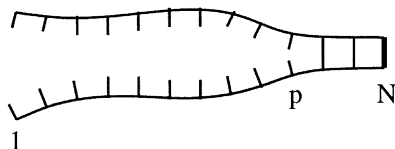
Im thermodynamischen Limes sind *alle drei* Gesamtheiten äquivalent.

2. Reißverschlußmodell eines DNS-Moleküls:

(1 + 3 = 4 Punkte)

Die Mikrozustände eines doppelstrangigen Moleküls sind wie folgt festgelegt:

- (i) Die beiden Stränge können an den Stellen $1, 2, \dots, N$ Bindungen eingehen. Eine geschlossene Bindung hat die Energie $\Omega \neq 0$, eine geöffnete die Energie 0.
(ii) Die p -te Bindung kann nur geöffnet werden, wenn $1, 2, \dots, p-1$ bereits offen sind. Die N -te kann nicht geöffnet werden.



- (a) Das Molekül befindet sich im Kontakt mit einem Wärmebad (Temperatur T). Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme.

Hinweis: $1 + x + x^2 + \dots + x^p = \frac{1 - x^{(p+1)}}{1 - x}$

- (b) Berechnen Sie die mittlere Zahl $\langle p \rangle$ offener Bindungen als Funktion von $\frac{\Omega}{kT}$ und N . Was folgt für den Anteil $\langle p \rangle / N$ offener Bindungen im Limes $N \rightarrow \infty$?

3. Paramagnetismus lokalisierter Spins:

(3 + 4 + 3 = 10 Punkte)

In einem Kristallgitter sind N Atome fixiert, die je eine nicht-abgeschlossene Schale mit Gesamtdrehimpuls (Spin) J aufweisen. In einem äußeren Magnetfeld $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z$, das in Einheiten der Energie gemessen wird, besitzt das Atom i also die Energie-Eigenwerte:

$$\varepsilon_i = -m_i B, \quad m_i = -J, (-J + 1), \dots, (J - 1), J$$

- (a) Geben Sie die Mikrozustände $\{\alpha\}$ und die zugehörigen Energien E_α an. Zeigen Sie, dass die kanonische Zustandssumme faktorisiert, $Z = (Z_1)^N$, und berechnen Sie Z_1 .
- (b) Die Magnetisierung ist definiert durch

$$M(T, B, N) = \langle m_1 + m_2 + \dots + m_N \rangle$$

Zeigen Sie, dass $M = N \langle m_1 \rangle$, und berechnen Sie $\langle m_1 \rangle$ als Funktion von B/kT .

- (c) Bestimmen Sie Näherungsausdrücke für M für kleine Magnetfelder $B/kT \ll 1$ und große Magnetfelder $B/kT \gg 1$, und berechnen Sie die Nullfeld-Suszeptibilität

$$\chi(T, N) = \lim_{B \rightarrow 0} \left(\frac{\partial M}{\partial B} \right)_T.$$