

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 09

PROF. DR. A. SHNIRMAN
DR. S. RACHEL

Blatt 6
Besprechung 2.6.2009

1. System von harmonischen Oszillatoren: (2 + 4 + 6 = 12 Punkte)

Betrachten Sie ein System von N unabhängigen und *unterscheidbaren* 1-dimensionalen harmonischen Oszillatoren, beschrieben durch die folgende Hamiltonfunktion

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 x_i^2 \right).$$

- (a) Berechnen Sie die klassische mikrokanonische Entropie als Funktion der Energie $E = U$. Betrachten Sie das Phasenraumvolumen, wobei das Volumen einer $2N$ -dimensionalen Kugel mit Radius r durch $V_{2N} = \pi^N r^{2N}/N!$ gegeben ist. Verwenden Sie $\ln(N!) \approx N \ln(N) - N$. Was ist die Temperatur?
- (b) Berechnen Sie klassisch das kanonische Zustandsintegral, die freie Energie, Entropie, innere Energie und spezifische Wärme C_V als Funktionen der Temperatur. Vergleichen Sie die Entropie mit der unter (a) erhaltenen mikrokanonischen Entropie.
- (c) Wiederholen Sie die unter (b) durchgeführten Berechnungen für den quantenmechanischen Fall, indem Sie von der kanonischen Zustandssumme ausgehen. Diskutieren Sie die innere Energie und die spezifische Wärme für hohe und tiefe Temperaturen.

[Hinweis für (b) und (c): Beachten Sie, dass die kanonische Zustandssumme für unabhängige und unterscheidbare Oszillatoren faktorisiert.]

2. Grenzfall klassischer Spins: (3 Punkte)

Betrachtet man das Problem aus Aufgabe 3 von Blatt 5 klassisch, so sind die Spins als Vektoren $\mathbf{J}$ mit fester Länge $|\mathbf{J}| = J$ darzustellen. Die Orientierung von $\mathbf{J}$ im Raum ist durch die Raumwinkel gegeben:

$$\mathbf{J} = (J^x(\Omega), J^y(\Omega), J^z(\Omega)), \quad \Omega = (\vartheta, \varphi), \quad d\Omega = \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi.$$

Die klassische Zustandssumme lautet damit

$$Z^{kl} = \int d\Omega_1 \dots \int d\Omega_N \exp \left(\frac{B}{kT} \sum_{i=1}^N J^z(\Omega_i) \right).$$

- (a) Zeigen Sie, dass $Z^{kl} = (Z_1^{kl})^N$ und berechne Z_1^{kl} . Zeigen Sie auch, dass die Magnetisierung $M^{kl} = \langle J^z(\Omega_1) + \dots + J^z(\Omega_N) \rangle$ gegeben ist durch $M^{kl} = N \langle J^z(\Omega_1) \rangle$, und berechnen Sie $\langle J^z(\Omega_1) \rangle$.

- (b) Zusatzaufgabe: Wie läßt sich in M aus Aufgabe 3 von Blatt 5 ein Grenzwert $J \rightarrow \infty$ durchführen, ohne dass dabei die physikalischen Größen M und innere Energie U unbeschränkt anwachsen? Vergleichen Sie das entsprechende Ergebnis $\lim_{J \rightarrow \infty} M$ mit M^{kl} .
(5 Zusatzpunkte)

3. Zustandsdichte eines freien Teilchens:

(3 + 2 = 5 Punkte)

In einem Würfel der Kantenlänge L mit Volumen $V = L^d$ in $d \in \{1, 2, 3\}$ Raumdimensionen befindet sich ein freies Punktteilchen.

- (a) Geben Sie die quantenmechanischen Eigenzustände $\psi(\mathbf{r})$ des Teilchens in Ortsdarstellung, sowie die Eigenenergien (Dispersion) $\varepsilon(\mathbf{k})$ an. An die Wellenfunktionen werden periodische Randbedingungen gestellt:

$$\psi(\mathbf{r} + L\mathbf{e}_\mu) = \psi(\mathbf{r}), \quad \mu = 1, 2, \dots, d$$

Zeigen Sie, dass daraus folgt:

$$k_\mu = \frac{2\pi}{L}n_\mu, \quad n_\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad \mu = 1, 2, \dots, d$$

Zeigen Sie damit, dass im thermodynamischen Limes ($V \rightarrow \infty$) für eine beliebige Funktion $F(\mathbf{k})$ gilt:

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} F(\mathbf{k}) \equiv \frac{1}{V} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_d} F(k_1, k_2, \dots, k_d) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_1}{2\pi} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_d}{2\pi} F(k_1, \dots, k_d)$$

- (b) Berechnen Sie nun die Zustandsdichte

$$\mathcal{N}(\varepsilon) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \delta(\varepsilon - \varepsilon(\mathbf{k}))$$

des freien Teilchens für $d = 1, 2, 3$.

Hinweis: Verwenden Sie Polar- und Kugelkoordinaten.