Karlsruher Institut
für Technologie (KIT)

Institut für Theorie der
Kondensierten Materie

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 09

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. S. Rachel

Blatt 7
Besprechung 9.6.2009

---

1. Großkanonische Gesamtheit: $(2+2+2=6$ Punkte)

Wir betrachten ein Gas aus freien Punktteilchen der Masse m in einem Volumen $V = L^3$. Die Dispersion eines Teilchens lautet

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

Die Teilchen sollen keinen Spin besitzen. Das Gas ist an ein Wärme- und Teilchenbad mit Temperatur T und chemischem Potential μ gekoppelt (großkanonische Gesamtheit).

(a) Die Teilchen seien *Bosonen* oder *Fermionen*. Geben Sie jeweils die Mikrozustände an, sowie die Ausdrücke für $Z_G(T,V,\mu)$, $U(T,V,\mu)$, $N(T,V,\mu)$.

Drücken Sie $U(T,V,\mu)$ und $N(T,V,\mu)$ auch mit Hilfe der Zustandsdichte $\mathcal{N}(\varepsilon)$ aus (vgl. Blatt 6, Aufgabe 3).

(b) In der Regel ist man an der kanonischen Gesamtheit interessiert, es sollen sich also genau N Teilchen in V befinden. Wie würden Sie $U(T,V,N)$ für *Bosonen* und *Fermionen* berechnen?

Hinweis: Versuchen Sie zuerst, die kanonische Zustandssumme direkt zu berechnen. Falls Sie scheitern, wählen Sie einen anderen Weg und erläutern diesen.

(c) Wie würden Sie $U(T,V,\mu)$ und $U(T,V,N)$ für den Fall berechnen, dass die Teilchen *unterscheidbar* sind (Boltzmann-Gas)?

2. Chemisches Potential für zweidimensionales Elektronengas: (6 Punkte)

Bestimmen Sie für ein zweidimensionales Elektronengas (Teilchenzahl N, Fläche A) das chemische Potential μ als Funktion der Temperatur T und der Fermienergie ϵ_F.

Hinweis: Das Integral $\int_a^b \mathrm{d}x \frac{1}{(e^x+1)}$ kann mit Hilfe der Substitution $e^x = t$ berechnet werden.

Betrachten Sie die Grenzfälle $k_\mathrm{B}T \ll \epsilon_F$ und $k_\mathrm{B}T \gg \epsilon_F$. Für welche Temperatur wird $\mu = 0$? Skizzieren Sie $\mu(T)$.

3. Ideales Fermi-Gas: $(2+2+2+2=8$ Punkte)

Wir betrachten N freie fermionische Punktteilchen der Masse m, die auch einen Spin 1/2 besitzen. Diese befinden sich in einem Volumen $V = L^3$, mit periodischen Randbedingungen für die Wellenfunktionen. Es sei $T=0$.

(a) Berechnen Sie die Fermi-Energie $\varepsilon_F(V,N)$ auf zwei Wegen:

(i) über die Zustandsdiche $\mathcal{N}(\varepsilon)$ (siehe Aufgabe 3b von Blatt 6), und

(ii) über das Volumen der Fermi-Kugel.

Im folgenden sollen Sie einige Ausdrücke aus der Vorlesung selbst berechnen. Beachten Sie, dass in der Vorlesung die Zustandsdichte $\mathcal{N}(\epsilon)$ auch mit $\nu(\epsilon)$ bezeichnet wurde.

Gegeben sei das großkanonische Potential Ω für das entartete ideale Fermi-Gas (entartet bedeutet, dass wir uns im Regime $k_B T \ll \epsilon_F$ befinden):

$$\Omega(T,V,\mu) = -(2s+1)V\left[b(\mu) + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 \mathcal{N}(\mu) + \ldots\right]$$

Die Größen a und b sind dabei wie folgt definiert:

$$a(\epsilon) \equiv \int_{-\infty}^{\epsilon} d\epsilon_1 \mathcal{N}(\epsilon_1) \quad \text{and} \quad b(\epsilon) \equiv \int_{-\infty}^{\epsilon} d\epsilon_1 a(\epsilon_1)\ .$$

(b) Leiten Sie aus dem großkanonischen Potential die Teilchen-Dichte n her (analog zur Vorlesung). Das Resultat lautet folgendermaßen:

$$n = \frac{2s+1}{6\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\mu^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi^2}{8\sqrt{\mu}}(k_B T)^2 + \ldots\right],$$

Damit wollen wir nun das chemische Potential $\mu(T,n)$ bestimmen, in dem Sie die folgende Gleichung, die aus obigem Resultat folgt, auflösen:

$$(\epsilon_F)^{\frac{3}{2}} = \mu^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi^2}{8\sqrt{\mu}}(k_B T)^2 + \ldots\ .$$

(c) Bestimmen Sie die spezifische Wärme

$$C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,N}$$

und achten Sie darauf, dass C_V eine Funktion von N und nicht von μ ist. Verwenden Sie das Resultat von Aufgabenteil (b).

(d) Nun betrachten wir den Druck $P(T,V,\mu)$. Leiten Sie das Resultat der Vorlesung,

$$P(T=0,V,\mu) = \frac{2}{5}\frac{N}{V}k_B T_F\ ,$$

bei $T=0$ durch explizite Rechnung her.