

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 09

PROF. DR. A. SHNIRMAN
DR. S. RACHEL

Blatt 8
Besprechung 16.6.2009

1. Chemisches Potential im idealen Bose-Gas: (1 + 3 + 4 + 2 = 10 Punkte)

N freie *Bosonen* befinden sich im Volumen $V = L^3$. Das chemische Potential $\mu(T, V, N)$ soll bestimmt werden:

- (a) Für hohe Temperaturen darf $-\mu \gg k_B T$ angenommen werden. Berechnen Sie für diesen Fall näherungsweise $N(T, V, \mu)$ und daraus $\mu(T, V, N)$, $U(T, V, N)$ und $c_V(T, V, N)$. Begründen Sie, warum die Annahme $-\mu \gg k_B T$ gerechtfertigt ist.
- (b) Betrachten Sie $N(T, V, \mu)$ für beliebige T , und zeigen Sie graphisch (unter Verwendung der Zustandsdichte), dass es eine Temperatur T_0 geben muß, unterhalb derer *Bose-Kondensation* vorliegt. Wie verläuft $\mu(T, V, N)$ für $0 \leq T \leq T_0$? Bestimmen Sie T_0 als Funktion von N/V .

Hinweis: Zeta-Funktion:

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dx \frac{x^{z-1}}{e^x - 1}, \quad \Gamma(z) = \text{Gamma-Funktion.}$$

- (c) Nun sei $T > T_0$, aber der Parameter $\delta t = (T - T_0)/T_0 > 0$ ist klein, $\delta t \ll 1$. Berechnen Sie $N(T, V, \mu)$ und daraus $\mu(T, V, N)$ in führender Ordnung δt .

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz

$$N(T, \mu) = N(T, 0) + \Delta N(T, \mu) \Rightarrow \Delta N(T, \mu) = N(T, \mu) - N(T, 0).$$

Berechnen Sie ΔN mit der Näherung: $n_B(E) \approx \frac{kT}{E}$, mit $E = \varepsilon, (\varepsilon - \mu)$.

Warum ist diese Näherung möglich?

- (d) Bestimmen Sie T_0 für ein zweidimensionales Bose-Gas aus N Teilchen in einem "Volumen" $V = L^2$. Warum kann es bei endlichen Temperaturen kein BEC geben?

2. Ideales Bose-Gas:

(2 + 5 + 3 = 10 Punkte)

Das großkanonische Potential des idealen Bose-Gases ist gegeben durch

$$\Omega(T, V, \mu) = k_B T (2s + 1) \ln(1 - z) - k_B T V (2s + 1) \frac{1}{\lambda_T^3} g_{5/2}(z) .$$

Überlegen Sie sich, wann der erste Term relevant ist.

- (a) Zeigen Sie ausgehend von Ω , dass folgende Relationen für Bosonen in der nicht-kondensierten Phase ($T > T_C$) mit Spin s gelten (achten Sie darauf, welche Variablen konstant sind):

$$\frac{P}{k_B T} = \frac{2s + 1}{\lambda_T^3} g_{5/2}(z)$$

$$\frac{N}{V} = \frac{2s + 1}{\lambda_T^3} g_{3/2}(z)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial T} g_{3/2}(z) \right|_{N, V} = -\frac{3}{2T} g_{3/2}(z)$$

$$\left. \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \right|_{\mu, V} = -\frac{\mu \beta}{T}$$

$$\left. \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \right|_{N, V} = -\frac{3}{2T} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial T} g_{5/2}(z) \right|_{\mu, V} = -g_{3/2}(z) \beta \frac{\mu}{T}$$

Was passiert mit den Relationen für $T < T_C$?

Die thermische de-Broglie-Wellenlänge ist definiert als $\lambda_T = h / \sqrt{2\pi m k_B T}$ und die "Bose-Funktion" als $g_\nu(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\nu}$ mit der Fugazität $z = \exp(\beta\mu)$.

Die Relation $z \partial_z g_\nu(z) = g_{\nu-1}(z)$ dürfte hilfreich sein.

- (b) Zeigen Sie nun, dass die innere Energie

$$U = \Omega + TS + \mu N = \sum_{\lambda} \epsilon_{\lambda} n_B(\epsilon_{\lambda})$$

geschrieben werden kann als

$$U(T, V, \mu) = \frac{3}{2} k_B T (2s + 1) \frac{V}{\lambda_T^3} g_{5/2}(z) .$$

- (c) Berechnen Sie aus der inneren Energie nun die spezifische Wärme C_V für $T > T_C$ und $T < T_C$. Beachten Sie, dass das chemische Potential μ bzw. z nicht mehr konstant gehalten werden.