

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 09

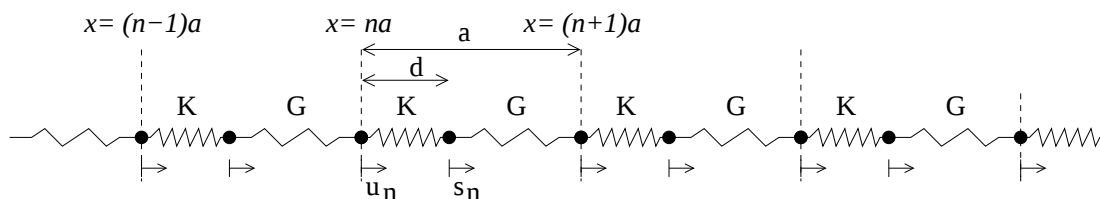
PROF. DR. A. SHNIRMAN
DR. S. RACHEL

Blatt 9
Besprechung 23.6.2009

1. Harmonische Kette:

(4 + 4 = 8 Punkte)

$2N$ identische Massen m können sich auf der x -Achse reibungsfrei bewegen und sind abwechselnd mit unterschiedlichen Federn $K > G$ verbunden:



Es sollen die klassischen Bewegungsgleichungen für kleine Auslenkungen u_n und s_n aus den jeweiligen Ruhelagen bei $x = na$ und $x = (na + d)$ gelöst werden. Die Lagrange-Funktion lautet

$$\mathcal{L}(u_n, s_n, \dot{u}_n, \dot{s}_n) = T - U, \quad \text{wobei} \quad U = \frac{K}{2} \sum_n (u_n - s_n)^2 + \frac{G}{2} \sum_n (u_{n+1} - s_n)^2,$$

(a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen. Zeigen Sie dann für den Ansatz

$$u_n(t) = u e^{i(kx - \omega t)}, \quad s_n(t) = s e^{i(kx - \omega t)}, \quad x = na,$$

dass periodische Randbedingungen

$$u_{n+N}(t) = u_n(t), \quad s_{n+N}(t) = s_n(t)$$

auf die Einschränkung

$$k = \frac{2\pi m}{a N}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

führen, und dass für eine eindeutige Lösung $-\frac{\pi}{a} < k \leq \frac{\pi}{a}$ gelten muß.

(b) Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen als 2×2 -Matrix und bestimmen Sie nun die Frequenzen $\omega_+(k)$, $\omega_-(k)$ der Eigenmoden der Kette, geben Sie jeweils auch s/u an. Wie verhalten sich $\omega_{\pm}(k)$ und s/u für kleine $|k| \ll \pi/a$? Was bedeutet das Ergebnis anschaulich? Skizzieren Sie $\omega_{\pm}(k)$ für alle erlaubten k . Wie viele akustische (-) und optische (+) Eigenmoden besitzt die Kette?

2. Phononen:

(2 + 4 + 3 + 1 + 2 = 12 Punkte)

Die in Aufgabe 1 berechneten Gitterschwingungen haben die Form harmonischer Oszillatoren und können somit wie aus der Quantenmechanik bekannt quantisiert werden. Die so entstandenen Schwingungszustände heißen akustische bzw. optische Phononen und die Besetzungszahl eines Schwingungszustands gehorcht der Bose-Einstein-Statistik.

Geben Sie den Hamilton-Operator für jede Mode $\lambda \equiv (k, \pm)$ an ($\pm$ steht für optisch/akustisch). Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme und die innere Energie. Der Einfachheit halber betrachten wir im Folgenden nur eine räumliche Dimension.

- (a) Betrachten Sie den Limes hoher Temperaturen und zeigen Sie, dass Sie die klassischen Resultate für U (Gleichverteilungssatz) und C_V (Dulong-Petit) finden.
- (b) Wie Sie in Aufgabe 1 gezeigt haben, gibt es für jede noch so tiefe Temperatur T Schwingungseigenfrequenzen ω_λ mit $\hbar\omega_\lambda < k_B T$, da ja zumindest die Frequenzen der immer vorhandenen akustischen Phononen gegen 0 gehen für $k \rightarrow 0$. Daher ist eine Entwicklung nach dem kleinen Parameter $\frac{k_B T}{\hbar\omega_\lambda} \ll 1$ nicht möglich, zumindest nicht für die akustischen Phononenzweige. Wir können aber annehmen, dass für tiefe Temperaturen nur noch akustische Zweige zum physikalischen Verhalten beitragen und nähern $\omega_\lambda = c_a k$. Bestimmen Sie die innere Energie U und die spezifische Wärme C_V in diesem Limes.

Hinweis: Ersetzen Sie die k -Summe wie üblich durch ein Integral, substituieren Sie und verschieben die obere Integrationsgrenze nach ∞ . Warum? Das resultierende Integral besitzt eine exakte Lösung:

$$\int_0^\infty dx \frac{x}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}$$

Die vorgenommene Näherung entspricht im Wesentlichen dem Debye-Modell. Im allgemeinen wird allerdings die Integralgrenze nicht nach ∞ geschoben, so dass Korrekturen zur Temperaturabhängigkeit auftreten und die Resultate auch für "mittlere" Temperaturbereiche gültig werden.

- (c) Nun wollen wir die noch stärkere Näherung $\omega_\lambda = \omega_0 = \text{const.}$ für alle λ verwenden. Berechnen Sie wiederum U und C_V . Zeigen Sie, dass Sie für große Temperaturen wiederum das Dulong-Petit'sche Gesetz finden und dass für tiefe Temperaturen U und C_V exponentiell verschwinden ($T \rightarrow 0$). Argumentieren Sie, dass dieses Resultat mit dem Ergebnis aus Aufgabe 1 konsistent ist.
Diese Näherung wird auch als Einstein-Modell bezeichnet und liefert für optische Phononen brauchbare Resultate.
- (d) Der Hamilton-Operator und entsprechend U sind die eines (nicht-wechselwirkenden) Bose-Gases. Worin besteht der Unterschied zum idealen Bose-Gas? Welche Raumdimension muss man betrachten, damit Bose-Einstein-Kondensation der Phononen auftritt?
- (e) Wiederholen Sie die Rechnung aus (b) für drei räumliche Dimensionen ($d = 3$) und leiten Sie das T^3 -Gesetz für C_V her. Diesmal wird Ihnen das folgende Integral begegnen: $\int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1} = \pi^4/15$.