Übungen zur Theoretischen Physik F SS 10

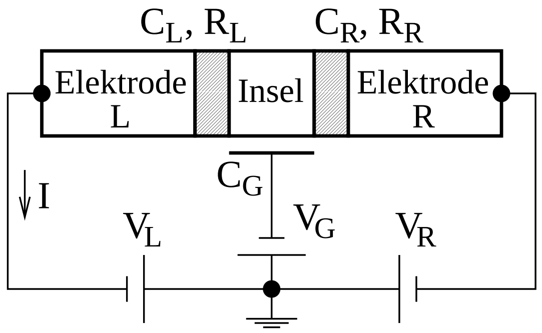
Prof. Dr. G. Schön
Dr. J. Cole

Blatt 4
Besprechung 14.05.2010

---

1. Master-Gleichung für den Einzelelektronentransistor: (4+6+6+4 = 20 Punkte)

Eine kleine metallische Insel sei über zwei Tunnelkontakte links und rechts an Zuleitungen angeschlossen, deren elektrostatische Potentiale $V_{L,R}$ von zwei Spannungsquellen konstant gehalten werden. (Elektrotechnisch gesehen ist ein Tunnelkontakt die Parallelschaltung eines Kondensators und eines Widerstands.) Eine dritte Spannungsquelle legt das Potential V_G auf einer Platte des Kondensators C_G fest, dessen andere Platte von der Insel gebildet wird. (Siehe Abbildung.)



Aufgrund der Quantisierung freier elektrischer Ladungen in Einheiten der Elektronenladung $-e < 0$ kann die Gesamtladung $-Ne$ der Insel nur um ganzzahlige Vielfache davon variieren. Jedoch ist die Zahl N nicht fest, sondern fluktuiert wegen stochastisch auftretender Tunnelprozesse, durch die Elektronen die Insel verlassen oder betreten können.

(a) Die obige Anordnung lässt sich aufteilen in das uns interessierende *System* (Insel + zwei Elektroden + Kondensatorplatte von C_G) und angekoppelte Teilchenbäder (die Spannungsquellen). Letztere sorgen dafür, dass die zur elektrischen Ladung konjugierte intensive Variable (das elektrostatische Potential) auf den Elektroden sowie der einen Platte des Kondensators C_G konstant bleibt. Die innere Energie unseres Systems ist die in den Kondensatoren gespeicherte elektrostatische Energie

$$U = \frac{Q_L^2}{2C_L} + \frac{Q_R^2}{2C_R} + \frac{Q_G^2}{2C_G}. \tag{1}$$

Welches ist aber das in der gegebenen Anordnung im Gleichgewicht minimierte thermodynamische Potential E?

Drücken Sie desweiteren die Gesamtladung der Insel durch die auf den Kondensatoren induzierten Ladungen $Q_j = C_j(V_I - V_j)$ aus. Dadurch können Sie das uns unbekannte elektrostatische Potential V_I der Insel als Funktion von N und den von uns extern beeinflußbaren Variable $Q_g = \sum_j C_j V_j$ und $C = \sum_j C_j$ schreiben. (Hier wie auch oben steht j für L, R und G.)

Benutzen Sie dies, um zu zeigen, dass sich das thermodynamische Potential E schreiben lässt als

$$E(N) = \frac{(Ne + Q_g)^2}{2C} - \frac{1}{2}\sum_j C_j V_j^2 \tag{2}$$

(b) Die Rate für einen Prozess, bei dem ein Elektron von der j^{ten} Elektrode auf die Insel tunnelt und damit deren Ladunszustand von N auf $N+1$ ändert, sei mit $\Gamma_{jI}(N)$ bezeichnet. Die analogen, in umgekehrter Richtung verlaufenden und dabei die Ladungszahl von N auf $N-1$ verringernden Prozesse haben die Raten $\Gamma_{Ij}(N)$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die Insel zur Zeit t im Ladungszustand N befindet, sei mit $P_N(t)$ bezeichnet. Stellen Sie die Mastergleichung für $P_N(t)$ auf.

Lösen Sie diese unter der Voraussetzung, dass nur zwei Ladungszustände n und $n+1$ der Insel energetisch erreichbar sind (d.h. , die Raten für den Übergang zu anderen Zuständen verschwinden). Was ergibt sich im stationären Grenzfall und wann ist dieser erreicht?

(c) Der Strom I (siehe Abbildung) ist im oben betrachteten stationären Grenzfall gegeben durch $I = -e\{\Gamma_{LI}(n)P_n - \Gamma_{IL}(n+1)P_{n+1}\}$. Mithilfe der Ergebnisse von (b) können Sie I allein durch die Tunnelraten ausdrücken. Interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch: Warum nennt man die betrachtete Situation das Regime 'sequentiellen Tunnelns'?

Verallgemeinerung der in Aufgabe 3(d) des Übungsblatt 3 durchzuführenden Rechnung auf den hier betrachteten Fall liefert die Tunnelraten

$$\Gamma_{jI}(N) = \frac{1}{e^2 R_j}\frac{\Delta E(N) - eV_j}{\exp[\frac{\Delta E(N)-eV_j}{kT}] - 1}, \quad \Gamma_{Ij}(N+1) = \frac{1}{e^2 R_j}\frac{-\Delta E(N) + eV_j}{\exp[\frac{-\Delta E(N)+eV_j}{kT}] - 1}.$$

Hierbei ist $\Delta E(N) = E(N+1) - E(N)$ die durch das Hinzufügen eines Elektrons zur Insel im Ladungszustand N herbeigeführte Änderung der freien Energie. Es hat die Bedeutung eines effektiven chemischen Potentials für die Insel. Da dieses wegen der Ganzzahligkeit von N nur diskrete Wete annimmt, sieht es so aus, als ob es auf der Insel diskrete Energieniveaus gibt. Zeichen Sie das entsprechende 'Energieniveauscheme'. Was ist der 'Niveauabstand'?

(Beachten Sie aber, dass diese 'Quantisierung' kein quantenmachanischer Effekt, sondern allein durch die Quantisierung elektrischer Ladungen in Einheiten der Eletronenladung bedingt ist.)

(d) Im Folgenden betrachten wir die Situation identischer Tunnelkontakte ($C_L = C_R$, $R_L = R_R$) und symmetrischer Vorspannung ($V_L = -V_R = V/2$). Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit der von uns betrachtete Fall eintritt, dass nur zwei Ladungszustände eine Rolle spielen?

Bei endlicher Vorspannung kann ein Strom durch die Insel fließen. Berechnen Sie die Kennlinie $I(V)$ bei $T = 0$. Warum ist das System ein *Einzelelektronen-Transistor*?