

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 10

Prof. Dr. G. Schön
Dr. J. ColeBlatt 5
Besprechung 21.05.2010

1. Master-Gleichung:

(2 + 3 = 5 Punkte)

Ein Kasten A vom Volumen Ω sei mit einem viel größeren Kasten B durch ein kleines Loch verbunden (Teilchen können das Loch nur einzeln passieren). Die Wahrscheinlichkeit, dass in der Zeit Δt ein Gasteilchen von A nach B geht, sei proportional zu $n\Delta t/\Omega$ (n : Zahl der Teilchen in A), und die Wahrscheinlichkeit von B nach A zu gehen sei proportional zu (gleiche Proportionalitätskonstante) $\rho\Delta t$ (ρ : konstante Teilchendichte in B).

- $P(n, t)$ sei die Wahrscheinlichkeit, zur Zeit t gerade n Teilchen in A zu finden. Schreiben Sie die Mastergleichung für $P(n, t)$ auf und lösen Sie sie für den stationären Fall.
- Bestimmen Sie $\langle n(t) \rangle$, indem Sie das erste Moment der Mastergleichung bilden und die entstehende Differentialgleichung lösen.

2. Fokker-Planck-Gleichung:

(2 + 2 + 3 = 7 Punkte)

Wir betrachten ein schwach ionisiertes Gas des Dichte N . Die Wechselwirkung der leichten, schnellen Elektronen (Geschwindigkeit v , Masse m) mit den langsamen, schweren Molekülrümpfen (Geschwindigkeit V , Masse M) soll elastisch sein. Das heißt, es gilt

$$(\vec{v} - \vec{V})^2 = (\vec{v}' - \vec{V}')^2$$

für die Geschwindigkeiten vor und nach einem Stoß.

- Zeigen Sie, dass für $m \ll M$, also für $\vec{V} \approx \vec{V}'$ für den Betrag der Impulsänderung beim Stoß

$$\Delta p = \frac{m}{v} \Delta \vec{v} \cdot \vec{V}$$

gilt.

- Berechnen Sie den Koeffizienten $\alpha^{(1)}$ der Fokker-Planck-Gleichung für die Elektronen im Impulsraum. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.
- Berechnen Sie den Koeffizienten $\alpha^{(2)}$ der Fokker-Planck-Gleichung. Benutzen Sie dazu die mittlere freie Weglänge $\ell = 1/N\sigma_t$. Dabei ist $\sigma_t = \langle 1 - \cos\theta \rangle_\Omega$ der Transportquerschnitt, der von Details des Streuprozesses abhängt, und θ der Streuwinkel. [Hinweis: Mitteln Sie in drei Schritten: Zuerst über die Richtungen und Beträge von $\vec{V}$ mit der Maxwellverteilung, d.h. es gilt $\langle V^2 \rangle = \frac{3T}{M}$, dann über die Streuwinkel und schließlich über die Anzahl der Stöße je Zeitintervall.]

3. Langevin-Gleichung:

(2 + 2 + 4 = 8 Punkte)

Wir betrachten einen stromgetriebenen RCL -Schwingkreis. Das Gleichgewicht der Ströme führt zur Bewegungsgleichung

$$C\ddot{V} + \frac{\dot{V}}{R} + \frac{V}{L} - \dot{I}_0 = \delta\dot{I}$$

wobei $I = V/R - \delta I$ der Strom durch den Widerstand ist. δI beschreibt Nyquist-Rauschen, d.h. es gilt

$$\langle \delta I(t) \delta I(t') \rangle = \frac{2k_B T}{R} \delta(t - t').$$

- (a) Bestimmen Sie die Impedanz $Z(\omega) = V(\omega)/I(\omega)$ durch Fouriertransformation der Bewegungsgleichung.
- (b) Bestimmen Sie $\langle \delta V(\omega) \delta V(\omega') \rangle$ sowie die Spektralfunktion $S_V(\omega)$ des Spannungsrauschens.

Hinweis:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} = \delta(\omega)$$

- (c) Berechnen und skizzieren Sie die Korrelationen des Spannungsrauschens $\langle \delta V(t) \delta V(t') \rangle$ im Fall $(2RC)^2 > LC$.

Hinweise: Sie erhalten einen Integranden mit komplexen Nullstellen. Verwenden Sie den Residuensatz zur Lösung des Integrals.