

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 10

Prof. Dr. G. Schön
Dr. J. ColeBlatt 7
Besprechung 11.06.2010

1. Bose-Einstein-Kondensation in Atomfallen: (2 + 3 + 4 + 6 = 15 Punkte)

In der Vorlesung wurde der idealisierte Fall eines uniformen Bose-Gases betrachtet, bei dem die Bose-Teilchen in einem Kasten vom Volumen V eingeschlossen sind. Hier soll die Bose-Einstein-Kondensation in Atomfallen behandelt werden, die von Eric Cornell, Wolfgang Ketterle und Carl Wieman nachgewiesen wurde, wofür sie 2001 den Physik-Nobelpreis erhielten. Die verwendeten magneto-optischen Fallen erzeugen mit guter Genauigkeit ein asymmetrisches Oszillatorpotential

$$V(x, y, z) = \frac{m}{2} \{ \omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2 \} . \quad (1)$$

Um Bose-Einstein-Kondensation zweifelsfrei nachweisen zu können, war es nötig, die thermodynamischen Eigenschaften eines im Potential $V(x, y, z)$ befindlichen Bose-Gases zu verstehen. Diese unterscheiden sich teilweise drastisch vom uniformen Fall.

- (a) Zeigen Sie, dass die Einteilchen-Eigenzustände eines im Potential $V(x, y, z)$ befindlichen Teilchens (also des dreidimensionalen harmonischen Oszillators) durch

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \hbar \left\{ \omega_x \left(n_x + \frac{1}{2} \right) + \omega_y \left(n_y + \frac{1}{2} \right) + \omega_z \left(n_z + \frac{1}{2} \right) \right\} \quad (2)$$

gegeben sind. (Dazu verwenden Sie am einfachsten einen Separationsansatz.)

- (b) Betrachten Sie den bei der Bose-Einstein-Kondensation makroskopisch besetzten Zustand in der Falle. Welche Wellenfunktion hat dieser in Orts- bzw. Impulsdarstellung? Wie sieht die entsprechende Dichte- bzw. Geschwindigkeitsverteilung aus? Was ist das typische Volumen V welches das Kondensat in diesem Zustand einnimmt? Vergleichen Sie mit der Situation des uniformen Bose-Gases. Was ist qualitativ anders durch die Existenz des äußeren Potentials?
- (c) Wir nehmen nun an, dass sich N Bosonen im Potential $V(x, y, z)$ befinden. Zeigen Sie, ausgehend von der bosonischen Besetzungszahlverteilung, dass

$$N = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{z}^j \sum_{n_x, n_y, n_z} e^{-j\beta \tilde{E}_{n_x, n_y, n_z}} = \frac{\tilde{z}}{1 - \tilde{z}} + \sum_j \tilde{z}^j \sum_{n_x, n_y, n_z > 0} e^{-j\beta \tilde{E}_{n_x, n_y, n_z}} \quad (3)$$

gilt, mit $\beta = 1/(k_B T)$, der Fugazität $\tilde{z} = \exp\{\beta[\mu - \frac{\hbar}{2}(\omega_x + \omega_y + \omega_z)]\}$ und $\tilde{E}_{n_x, n_y, n_z} = E_{n_x, n_y, n_z} - \frac{\hbar}{2}(\omega_x + \omega_y + \omega_z)$. Hier ist $N_0 = \tilde{z}/(1 - \tilde{z})$ die Besetzungszahl des Einteilchenzustandes mit der niedrigsten Energie. Im Grenzfall hoher Temperatur, d.h. $k_B T \gg \max\{\hbar\omega_x, \hbar\omega_y, \hbar\omega_z\}$, kann man die Summe über angeregte Zustände durch ein Integral ersetzen:

$$\sum_{n_x, n_y, n_z} \cdots \rightarrow \int_0^{\infty} dn_x \int_0^{\infty} dn_y \int_0^{\infty} dn_z \cdots . \quad (4)$$

Werten Sie diese aus, um $N - N_0$ als Funktion der Fugazität und der Temperatur zu finden. Zeigen Sie, dass $\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3$ und finden Sie T_c .

- (d) Mittels der Zustandsdichte $N(E)$ lässt sich die Zahl von Boseteilchen in angeregten Zuständen allgemein schreiben als

$$N - N_0 = V \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{z}^j \int_0^{\infty} dE N(E) e^{-j\beta E}. \quad (5)$$

Vergleich von Gl. (5) mit Gl. (3) liefert den formalen Ausdruck

$$N(E) = \frac{1}{V} \sum_{n_x, n_y, n_z > 0} \delta(E - \tilde{E}_{n_x, n_y, n_z})$$

für die Zustandsdichte einer dreidimensionalen Atomfalle. Benutzen Sie die Relation $\frac{d}{dE}\Theta(E) = \delta(E)$ sowie die Ersetzung (4), um $N(E)$ für ein harmonisches Potential in $d = 3, 2, 1$ Dimensionen zu bestimmen und berechnen Sie $N - N_0$ durch Einsetzen in Gl. (5). Wiederholen Sie dieses für den Fall eines uniformen Bose-Gases. [Hinweis: Die Zustandsdichte des uniformen Bose-Gases ist gegeben durch $N_u(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^D} \int d^D p \delta(E - \frac{p^2}{2m})$.] Für welche Zahl von Raumdimensionen tritt Bose-Einstein-Kondensation des Bose-Gases in einer Atomfalle bzw. im uniformen Bose-Gas auf? Wie hängt jeweils T_c von der Teilchendichte ab? Begünstigt oder erschwert ein äußeres Potential das Auftreten von Bose-Einstein-Kondensation?

2. Planck'sches Strahlungsgesetz:

(2 + 3 = 5 Punkte)

Die Oberflächentemperatur eines Sternes lässt sich über die Frequenz abschätzen, bei der das Maximum der vom Stern emittierten Strahlungsenergie liegt.

- (a) Berechnen Sie das Maximum der spektralen Energiedichte aus dem Planck'schen Strahlungsgesetz.
- (b) Berechnen Sie aus den experimentell ermittelten Wellenlängen für bestimmte kosmische Objekte die zugehörigen Temperaturen. Die folgenden Wellenlängen gehören zum Maximum der Frequenzverteilung:
 - (i) Grundstrahlung des Weltalls: $\lambda_{\max} = 0.16 \text{ cm}$
 - (ii) Erdoberfläche: $\lambda_{\max} = 1.6 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$
 - (iii) Sonnenoberfläche: $\lambda_{\max} = 0.8 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$