

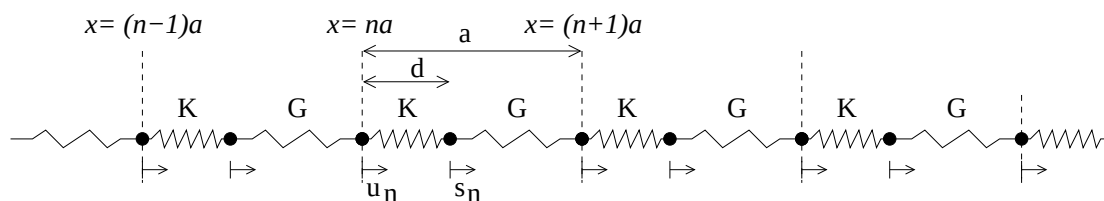
Übungen zur Theoretischen Physik F SS 10

Prof. Dr. G. Schön
Dr. J. ColeBlatt 8
Besprechung 18.06.2010

1. Harmonische Kette:

(2 + 4 = 6 Punkte)

$2N$ identische Massen m können sich auf der x -Achse reibungsfrei bewegen und sind abwechselnd mit unterschiedlichen Federn $K > G$ verbunden:



Es sollen die klassischen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_n &= -K(u_n - s_n) - G(u_n - s_{n-1}) \\ m\ddot{s}_n &= -K(s_n - u_n) - G(s_n - u_{n+1}) \end{aligned}$$

für kleine Auslenkungen u_n und s_n aus den jeweiligen Ruhelagen bei $x = na$ und $x = (na + d)$ gelöst werden.

(a) Zeigen Sie dann für den Ansatz

$$u_n(t) = u e^{i(kx - \omega t)}, \quad s_n(t) = s e^{i(kx - \omega t)}, \quad x = na,$$

dass periodische Randbedingungen

$$u_{n+N}(t) = u_n(t), \quad s_{n+N}(t) = s_n(t)$$

auf die Einschränkung

$$k = \frac{2\pi m}{a N}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

führen, und dass für eine eindeutige Lösung $-\frac{\pi}{a} < k \leq \frac{\pi}{a}$ gelten muß.

- (b) Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen als 2×2 -Matrix und bestimmen Sie nun die Frequenzen $\omega_+(k)$, $\omega_-(k)$ der Eigenmoden der Kette, geben Sie jeweils auch s/u an. Wie verhalten sich $\omega_{\pm}(k)$ und s/u für kleine $|k| \ll \pi/a$? Was bedeutet das Ergebnis anschaulich? Skizzieren Sie $\omega_{\pm}(k)$ für alle erlaubten k . Wie viele akustische (-) und optische (+) Eigenmoden besitzt die Kette?

2. Phononen:

(2 + 1 + 2 + 3 = 8 Punkte)

Die in Aufgabe 1 berechneten Gitterschwingungen haben die Form harmonischer Oszillatoren und können somit wie aus der Quantenmechanik bekannt quantisiert werden. Die so entstandenen Schwingungszustände heißen akustische bzw. optische Phononen und die Besetzungszahl eines Schwingungszustands unterliegt der Bose-Einstein-Statistik.

- (a) Geben Sie den Hamilton-Operator für die $2N$ Oszillations Moden ($\lambda \equiv (k, \pm)$) der Harmonische Kette an ($\pm$ steht für optisch/akustisch). Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme und die innere Energie.
- (b) Betrachten Sie den Limes hoher Temperaturen und zeigen Sie, dass die klassischen Resultate für $U = 2NkT$ (Gleichverteilungssatz) und $C_V = 2Nk$ (Dulong-Petit) gelten.

- (c) Ein sehr einfache Näherung ist $\omega_\lambda = \omega_0 = \text{const.}$ für alle λ . Berechnen Sie wiederum U und C_V mit diese Näherung.

Zeigen Sie, dass Sie für große Temperaturen das Dulong-Petit'sche Gesetz finden und dass für tiefe Temperaturen U und C_V exponentiell verschwinden ($T \rightarrow 0$).

- (d) Wie Sie in Aufgabe 1 gezeigt haben, gibt es für jede noch so tiefe Temperatur T Schwingungseigenfrequenzen ω_λ mit $\hbar\omega_\lambda < k_B T$, da ja zumindest die Frequenzen der immer vorhandenen akustischen Phononen gegen 0 gehen für $k \rightarrow 0$. Daher ist eine Entwicklung nach dem kleinen Parameter $\frac{k_B T}{\hbar\omega_\lambda} \ll 1$ nicht möglich, zumindest nicht für die akustischen Phononenzweige. Wir können aber annehmen, dass für tiefe Temperaturen nur noch akustische Zweige zum physikalischen Verhalten beitragen und nähern $\omega_\lambda = c_a k$. Bestimmen Sie die innere Energie U und die spezifische Wärme C_V in diesem Limes.

Hinweis: Ersetzen Sie die k -Summe wie üblich durch ein Integral, substituieren Sie und verschieben Sie die obere Integrationsgrenze nach ∞ . Warum? Das resultierende Integral besitzt eine exakte Lösung:

$$\int_0^\infty dx \frac{x}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}$$

3. Chemisches Potenzial für zweidimensionales Elektronengas: (3 + 3 = 6 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie für ein zweidimensionales Elektronengas (Teilchenzahl N , Fläche A) das chemische Potential μ als Funktion der Temperatur T und der Fermienergie ϵ_F .

Hinweis: Das Integral $\int_a^b dx \frac{1}{(e^x + 1)}$ kann mit Hilfe der Substitution $e^x = t$ berechnet werden.

- (b) Betrachten Sie die Grenzfälle $k_B T \ll \epsilon_F$ und $k_B T \gg \epsilon_F$. Für welche Temperatur wird $\mu = 0$? Skizzieren Sie $\mu(T)$.