

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 10

Prof. Dr. G. Schön
Dr. J. ColeBlatt 9
Besprechung 25.06.2010**1. Klassisches mikrokanonisches Zwei-Zustands-System, :** $(2 + 4 + 2 + 2 + 3 = 13$ Punkte)

Wir betrachten ein Ensemble von N unabhängigen, klassischen Spin- $\frac{1}{2}$ -Systemen in einem Magnetfeld. Jeder einzelne Spin hat die Energie $\pm\mu_B H$. Die Gesamtenergie ist gegeben durch $E = -m\mu_B H$, mit $m = -N, -N + 2, \dots, N - 2, N$.

- Geben Sie die Zahl der nach “oben” und “unten” zeigenden Spins in Abhängigkeit von N und m an und finden Sie einen Ausdruck für den Entartungsgrad der Energie.
- Berechnen Sie die mikrokanonischen (d.h. N und m fest) Erwartungswerte $\langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle$, sowohl für $i = j$ als auch für $i \neq j$.
- Berechnen Sie die Entropie für große N . Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis mit der Stirling’schen Formel.
- Berechnen Sie daraus die Temperatur als Funktion der Energie. Was fällt Ihnen am Wertebereich der Temperatur auf? Welche Erklärung haben Sie für dieses Ergebnis?
- Berechnen Sie die spezifische Wärme C_H und die Magnetisierung M .

2. Ising Modell für Zwei Spins: $(2 + 1 + 1 = 4$ Punkte)

Das Ising-Modell zweier wechselwirkender Spins $1/2$ auf Gitterplätzen 1 und 2 in einem äußeren Magnetfeld $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z$ lautet (in geeigneten Einheiten mit $\mu_B = 1$)

$$\hat{H} = -J \hat{S}_1^z \hat{S}_2^z - B(\hat{S}_1^z + \hat{S}_2^z).$$

- Bestimmen Sie die Eigenzustände und -energien von $\hat{H}$, und damit die kanonische Zustandssumme $Z_K(T, B)$.
- Berechnen Sie die Magnetisierung

$$M(T, B) = \langle \hat{S}_1^z + \hat{S}_2^z \rangle$$

und die Suszeptibilität

$$\chi(T) = \lim_{B \rightarrow 0} \frac{\partial M}{\partial B}.$$

Wie verläuft $\chi(T)$ für $kT \ll J$ bzw. $kT \gg J$?

Für den thermischen Mittelwert gilt $\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}(\hat{W} \hat{A})$.

- (c) Alternative Methode zur Berechnung der Suszeptibilität: Es gilt folgende Relation (s. u.)

$$\chi(T) = \frac{1}{kT} \langle (\hat{S}_1^z + \hat{S}_2^z)^2 \rangle \Big|_{B=0}.$$

Berechnen Sie für $B = 0$ den Erwartungswert $\langle (\dots)^2 \rangle$ und zeigen Sie, dass das Ergebnis mit $\chi(T)$ aus Aufgabe 2b übereinstimmt.

3. Relation zwischen Suszeptibilität und Korrelatoren im Ising-Modell:

(3 Punkte)

Benutzen Sie den allgemeinen Ausdruck $Z = \text{Tr} [e^{-H/(kT)}]$ für die Zustandssumme des durch den Hamiltonoperator $H = -J \sum_{\langle ij \rangle} S_{iz} S_{jz} - B \sum_i S_{iz}$ beschriebenen Ising-Modells, um die Relation (von Aufgabe 2c) zu beweisen:

$$\chi \equiv \frac{\partial M}{\partial B} = \frac{1}{kT} \left[\sum_{i,j} \langle S_{iz} S_{jz} \rangle - \left\langle \sum_i S_{iz} \right\rangle^2 \right].$$