

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 10**Prof. Dr. G. Schön**
Dr. J. Cole**Blatt 10**
Besprechung 02.07.2010**1. Zustandsdichte:** (6 Punkte)

Betrachten Sie freie Teilchen mit Dispersionsrelation $\epsilon_{\vec{p}} = \vec{p}^2/2m$. Die Summe $\sum_{\vec{p}}$ über eine Funktion $F(\epsilon_{\vec{p}})$ kann geschrieben werden als

$$\sum_{\vec{p}} F(\epsilon_{\vec{p}}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon D(\epsilon) F(\epsilon),$$

wobei

$$D(\epsilon) = \sum_{\vec{p}} \delta(\epsilon - \epsilon_{\vec{p}})$$

die Zustandsdichte bezeichnet.

Berechnen Sie die Zustandsdichte $D(\epsilon)$ für freie Teilchen in ein, zwei und drei Raumdimensionen. Skizzieren Sie $D(\epsilon)$ für diese drei Fälle.

2. Zweite Quantisierung: (2 + 2 + 2 + 2 = 8 Punkte)

Seien $c^\dagger$ ein Fermion- und $b^\dagger$ ein Bose-Erzeugungsoperatoren.

- Berechnen Sie $\{c^\dagger c, c^\dagger\}$, $\{c^\dagger c, c\}$, $[b^\dagger b, b^\dagger]$ und $[b^\dagger b, b]$.
- Schreiben Sie die Strom- und Spindichte operator für ein Fermisystem in der Impulsbasis mit den $c_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger, c_{\mathbf{k},\sigma}$, und in der Ortsbasis mit den Feldoperatoren $\psi_\sigma(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ bzw. $\psi_\sigma^\dagger(\mathbf{r})$.
- In 1. quantisierter Form hat die Elektron-Elektron Wechselwirkung die Form

$$V \equiv \sum_{i < j} v(\hat{\mathbf{r}}_i - \hat{\mathbf{r}}_j),$$

wobei $\hat{\mathbf{r}}_i$ den Ortsoperator des i -ten Teilchens bezeichnet. Zeigen Sie, dass V wie folgt durch die 1. quantisierte Form der Dichte, $\hat{\rho}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}_i)$, ausgedrückt werden kann:

$$V = \frac{1}{2} \int d^3r d^3r' v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') [\hat{\rho}(\mathbf{r}) \hat{\rho}(\mathbf{r}') - \hat{\rho}(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')]]$$

- Schreiben Sie nun V in der 2. quantisierten Form in der Orts- und Impulsbasis.

3. Zweite Quantisierung – Dichtekorrelationen.

(2+2+2 = 6 Punkte)

Der Operator für die Dichtefluktuationen eines Quantengases hat in zweiter Quantisierung die Form

$$\delta n(\vec{r}) \equiv n(\vec{r}) - \bar{n} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k} \neq \vec{k}', \sigma} c_{\vec{k}\sigma}^\dagger c_{\vec{k}'\sigma} e^{-i\vec{r} \cdot (\vec{k} - \vec{k}')} \quad \text{wobei } \bar{n} \equiv \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \sigma} c_{\vec{k}\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} \quad . \quad (1)$$

- (a) Leiten Sie Gl. (1) aus dem Ausdruck $n(\vec{r}) = \sum_{\sigma} \Psi_{\sigma}^{\dagger}(\vec{r}) \Psi_{\sigma}(\vec{r})$ für die Elektronendichte in zweiter Quantisierung ab!
- (b) Benutzen Sie Gl. (1) sowie die im Falle $\vec{k} \neq \vec{l}, \vec{k}' \neq \vec{l}'$ gültige Identität $\langle c_{\vec{k}\sigma}^\dagger c_{\vec{l}\sigma} c_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger c_{\vec{l}'\sigma'} \rangle = \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\vec{k},\vec{l}'} \delta_{\vec{l},\vec{k}'} \langle c_{\vec{k}\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} \rangle \langle c_{\vec{l}\sigma}^\dagger c_{\vec{l}\sigma} \rangle$, um zu zeigen, daß die Dichtekorrelationsfunktion für freie Elektronen in drei Raumdimensionen die Form $\langle \delta n(\vec{r}) \delta n(\vec{0}) \rangle = \langle \bar{n} \rangle \delta(\vec{r}) + g(|\vec{r}|)$ hat, wobei

$$g(|\vec{r}|) = -2 \left| \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \langle c_{\vec{k}\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} \rangle e^{-i\vec{r} \cdot \vec{k}} \right|^2 \quad . \quad (2)$$

- (c) Berechnen und skizzieren Sie $g(|\vec{r}|)$ bei $T = 0$ für ein entartetes Fermigas freier Elektronen mit chemischem Potential $\mu \equiv \epsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$.