

## Übungen zur Theoretischen Physik F SS 12

Prof. Dr. Jörg Schmalian  
Dr. Igor GornyiBlatt 1  
Besprechung 20.4.2012**1. Integrabilitätsbedingung:**

(2 + 3 = 5 Punkte)

Eine Form

$$\delta\omega = f(x, y)dx + g(x, y)dy$$

heißt integrabel wenn eine Funktion  $h(x, y)$  existiert, deren vollständiges Differential  $dh$  identisch mit  $\delta\omega$  ist. Das ist genau dann der Fall, wenn die Integrabilitätsbedingung

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_x = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_y$$

erfüllt ist. Im Falle von nur zwei unabhängigen Variablen kann man immer einen integrierenden Faktor  $\alpha(x, y) \neq 0$  finden, so daß die Form  $\alpha\delta\omega$  integrabel ist.

Testen Sie, ob für die folgenden Fälle

- (a)  $f(x, y) = 3x^2 - 2xy - y^2$  und  $g(x, y) = -x^2 - 2xy + y^2$ ,  
(b)  $f(x, y) = 3x + y$  und  $g(x, y) = -x - 3y$ ,

$\delta\omega$  integrabel ist, und bestimmen Sie  $h(x, y)$ . Finden Sie dazu im Falle einer nichtintegrablen Form einen geeigneten integrierenden Faktor  $\alpha(x, y)$  (Ansatz:  $\alpha(x, y) = Ax + By$ ).

**2. Legendretransformation:**

(2 + 3 = 5 Punkte)

Gegeben sei eine Kurve  $U(S)$  in einem Bereich, in welchem sich das Vorzeichen ihrer Krümmung nicht ändert. Geben Sie eine eindeutige Darstellung der Kurve, indem Sie anstelle der Koordinaten  $S$  und  $U$  die Steigung  $T = dU/dS$  sowie den  $U$ -Achsenabschnitt  $F$  der Tangente an jeden Kurvenpunkt als unabhängige Variable verwenden. Die Funktion  $F(T)$  heißt Legendretransformierte zu  $U(S)$ . Auflösen der (obigen) Beziehung  $T = T(S)$  nach  $S$  definiert eine Funktion  $S = S(T)$ .

- (a) Zeigen Sie, daß die vollständigen Differentiale der Kurve und ihrer Legendretransformierten durch

$$dU(S) = T(S)dS \quad \text{und} \quad dF(T) = -S(T)dT$$

gegeben sind.

- (b) Gegeben sei nun eine Fläche  $U(S, V)$  mit positiver Steigung bezüglich  $S$ , negativer Steigung bezüglich  $V$  und unveränderlichem Vorzeichen der Krümmung. Führen Sie jeweils eine Legendretransformation für konstant gehaltenes  $V$  bzw. für konstant gehaltenes  $S$  durch. Die Steigungen seien durch  $T = \partial U / \partial S|_V$  sowie  $-P = \partial U / \partial V|_S$  gegeben. Auflösen von  $T(S, V)$  nach  $S$  und  $P(S, V)$  nach  $V$  definiert Funktionen  $S(T, V)$  und  $V(S, P)$ . Bestimmen Sie analog zu oben die vollständigen Differentiale der Legendretransformierten  $F(T, V)$  und  $H(S, P)$ . Die Funktionen  $U(S, V)$ ,  $F(T, V)$  und  $H(S, P)$  entsprechen der inneren Energie, der freien Energie und der Enthalpie.

### 3. Funktionaldeterminantenkalkül:

(3 + 2 + 5 = 10 Punkte)

Seien  $u(x, y)$  und  $v(x, y)$  Funktionen der unabhängigen Variablen  $x$  und  $y$ . Als Funktionaldeterminante bezeichnet man das Gebilde

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}|_y & \frac{\partial u}{\partial y}|_x \\ \frac{\partial v}{\partial x}|_y & \frac{\partial v}{\partial y}|_x \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie die Relationen

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= \frac{\partial u}{\partial x}|_y & \frac{\partial(x, v)}{\partial(x, y)} &= \frac{\partial v}{\partial y}|_x \\ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= -\frac{\partial(v, u)}{\partial(x, y)} = -\frac{\partial(u, v)}{\partial(y, x)} & \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \frac{\partial(s, t)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(s, t)}{\partial(s, t)}. \end{aligned}$$

- (b) Es sei nun ein funktionaler Zusammenhang zwischen  $x$  und  $y$  durch  $\phi(x, y) = \text{const} = z$  gegeben, der eine Abhängigkeit  $y = y(x)$  herstellt. Zeigen Sie, daß dann gilt:

$$\frac{\partial x}{\partial y}|_\phi = \left( \frac{\partial y}{\partial x}|_\phi \right)^{-1}, \quad \frac{\partial y}{\partial x}|_\phi = -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}|_y}{\frac{\partial \phi}{\partial y}|_x}.$$

(Bem.: Oft schreiben wir in obigen Beziehungen einfach  $z = z(x, y)$  und ersetzen  $\phi$  überall durch  $z$ ).

- (c) Wir betrachten nun drei Variablen, die eine Bedingung  $F(x, y, z) = 0$  erfüllen, sowie zwei der Variablen eine weitere Bedingung  $w = w(x, y)$ . Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\frac{\partial x}{\partial w}|_z = \frac{\partial x}{\partial y}|_z \frac{\partial y}{\partial w}|_z, \quad \frac{\partial x}{\partial y}|_z = \frac{\partial x}{\partial y}|_w + \frac{\partial x}{\partial w}|_y \frac{\partial w}{\partial y}|_z.$$

**4. Carnot cycle for an ultrarelativistic gas of bosons:** (10 Punkte)

The internal energy of an ultrarelativistic gas of bosons (e.g. photons) is given as

$$U = \sigma VT^4 \quad (1)$$

where

$$\sigma = \frac{4\pi^2 k_B^4}{15 (\hbar c)^3}$$

is a constant. For the pressure of such a system, the relation

$$p = \frac{1}{3} \frac{U}{V} \quad (2)$$

holds. The chemical potential of an ultrarelativistic Bose-gas vanishes:  $\mu = 0$ . For the moment, we just take these equations as experimental observations without a microscopic foundation.

Analyze a closed Carnot cycle (isothermal expansion  $\rightarrow$  adiabatic expansion  $\rightarrow$  isothermal compression  $\rightarrow$  adiabatic compression) of such a system and determine

$$\Delta Q = \oint \delta Q \quad (3)$$

as well as

$$\Delta S = \oint \frac{\delta Q}{T}. \quad (4)$$

Interpret these results.