Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 12

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Dr. Igor Gornyi

Blatt 4: 35 Punkte + 15 Bonuspunkte
Besprechung 11.5.2012

---

1. Maxwell-Verteilung: (5 + 5 = 10 Punkte)

Betrachten Sie das ideale Gas mit N Teilchen, Gesamtenergie E und Volumen V. Drücken Sie die Gesamtenergie $H[\{p_n\},\{x_n\}]$ des Gases durch die Koordinaten und die Impulse der Teilchen aus. Die Wahrscheinlichkeit dw, das System im Phasenvolumenelement $\prod_{n=1}^{N} d^3p_n d^3x_n$ zu finden, lautet dann

$$\begin{aligned} dw &= \rho(\{p_n\},\{x_n\}) \prod_{n=1}^{N} d^3p_n d^3x_n, \\ \rho(\{p_n\},\{x_n\}) &= C_0 \delta(H[\{p_n\},\{x_n\}] - E). \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die 1-Teilchen-Verteilungsfunktion

$$\rho_1(x_1,p_1) \equiv \int \prod_{n=2}^{N} d^3p_n d^3x_n \, \rho(\{p_n\},\{x_n\})$$

und dadurch die 1-Teilchen-Impulsverteilung $f(p_1) = \int d^3x_1 \, \rho_1(x_1,p_1)$.

(b) Drücken Sie das Ergebnis durch die Energie pro Teilchen $\bar{\epsilon} = E/N$ aus. Vereinfachen Sie das Ergebnis im Limes $N \gg 1$. Die Normierungskonstante ist in dieser Übung nicht wichtig.

Hinweis: Für $N \gg 1$ gilt $\left(1 - \frac{x}{N}\right)^N \approx e^{-x}$. Die Maxwell-Verteilung ergibt sich aus der für das ideale Gas gültige Relation $\bar{\epsilon} = 3k_{\mathrm{B}}T/2$.

2. Kanonische Gesamtheit: (5 + 5 = 10 Punkte)

In der kanonischen Gesamtheit ($\rho_n = Z^{-1}e^{-\beta E_n}$) ist die innere Energie durch einen Mittelwert $U = \langle E \rangle$ gegeben.

(a) Beweisen Sie die folgende Relation

$$\langle (\Delta E)^2 \rangle = k_B T^2 C_V \ ,$$

wobei die Varianz definiert als $\langle (\Delta E)^2 \rangle \equiv \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$ ist und C_V die Wärmekapazität ist.

(b) Für ein Gas aus N Teilchen begründen Sie die Kleinheit der Schwankungen

$$\frac{\sqrt{\langle (\Delta E)^2 \rangle}}{\langle E \rangle} \propto \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

3. Gaußverteilung für mehrere Variablen:

(5 + 5 + 5 = 15 Punkte)

Die Gaußverteilung $\rho(\xi_1, \ldots, \xi_M)$ für die stochastischen Variablen $\xi_1, \ldots \xi_M$ sei definiert durch

$$\rho(\xi_1, \ldots, \xi_M) = \sqrt{\frac{\det(\mathbf{A})}{(2\pi)^M}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{M} \xi_i A_{ij} \xi_j\right) \tag{1}$$

Da ρ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, muss diese normiert sein, d.h.

$$\int d\xi_1 \ldots d\xi_M \, \rho(\xi_1, \ldots, \xi_M) = 1.$$

Die Matrix A muss symmetrisch und positiv definit sein. Es ist hilfreich, die Inverse der Matrix A_{ij} einzuführen: $G_{ij} = [A^{-1}]_{ij}$. Aus $A_{ij} = A_{ji}$ folgt dann auch $G_{ij} = G_{ji}$.

(a) Berechnen Sie die folgenden Größen:

den Mittelwert

$$\langle \xi_i \rangle = \int d\xi_1 \ldots d\xi_M \xi_i \rho(\xi_1, \ldots, \xi_M),$$

die Standardabweichung

$$\langle \xi_i^2 \rangle - \langle \xi_i \rangle^2,$$

den Korrelator

$$\langle \xi_i \xi_j \rangle,$$

und

$$\left\langle \exp\left(i\beta \sum_{k=1}^{M} \xi_k\right)\right\rangle.$$

Hinweis: Führen Sie dann eine quadratische Ergänzung durch.

(b) Betrachten wir nun eine zeitabhängige stochastische Variable $\xi(t)$ im Zeitintervall $[0, \tau]$. Man sagt, $\xi(t)$ sei Gauß-verteilt, wenn die Verteilungsfunktion für die Funktion $\xi(t)$ durch

$$\rho(\{\xi(t)\}) \sim \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' \; \xi(t) g^{-1}(t - t') \xi(t')\right). \tag{2}$$

gegeben ist.

Um eine Interpretation für obige Verteilungsfunktion zu finden, diskretisieren Sie die Zeit in M Zeitintervalle Δt. Bringen Sie die diskretisierte Verteilungsfunktion in die Form der Gleichung (1).

Berechnen Sie den Mittelwert

$$\left\langle \exp\left(i \int_0^\tau dt \, \xi(t)\right)\right\rangle, \tag{3}$$

indem Sie die diskretisierte Version benutzen und danach das Ergebnis wieder durch kontinuierliche Integrale ausdrücken.

(c) Berechnen Sie die Korrelationsfunktion $\langle \xi(t)\xi(t')\rangle$. Finden Sie daraus eine physikalische Interpretation für die Größe $g(t - t')$. Unter welchen Umständen ist die Diskretisierung der Zeit eine gute Näherung?

4. Ising model (bonus exercise): (5+5+5=15 Bonuspunkte)

Consider an Ising model of $N \gg 1$ spins, where every spin interacts with every other spin with an interaction J/N:

$$H = -\frac{J}{N}\sum_{i,j=1}^{N} S_i S_j - \mu_B B \sum_{i=1}^{N} S_i \tag{4}$$

(a) Determine the partition function Z of the problem.

(b) Analyze the magnetization $M = -\frac{\partial F}{\partial B}$ as a function of temperature and magnetic field. Is there a regime where $M\,(B \to 0) \neq 0$?

(c) Find the specific heat as function of temperature.

Hinweis: Find out how many ways there are to get a fixed total spin. There is one way to get spin N, there are N ways to get a spin $N-2$, etc. Use the Stirling formula (Blatt 2, Aufgabe 2) to approximate the corresponding combinatorial factors.

Alternatively, one can employ the "Hubbard-Stratonovich" transformation

$$e^{\alpha X^2} = \sqrt{\frac{1}{4\pi\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\ \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4\alpha} + \lambda X\right)$$

and then calculate the integrals over λ in the partition function using the saddle-point method (Blatt 2, Aufgabe 2).