Übungen zur Theoretischen Physik F SS 12

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Dr. Igor Gornyi

Blatt 5: 40 Punkte + 15 Bonuspunkte
Besprechung 25.5.2012

---

1. Gibbs'sches Paradoxon (5+5=10 Punkte)

Ein thermisch abgeschlossener Behälter ist durch eine Trennwand in zwei Kammern unterteilt. Beide Kammern enthalten ideale Gase mit der konstanten Wärmekapazität c_V. Die eine Kammer enthält N_1 Teilchen bei der Temperatur T_1 und dem Druck p_1, die andere N_2 Teilchen bei der Temperatur T_2 und dem Druck p_2.

(a) Die Trennwand werde nun verschiebbar gemacht und ihre thermische Isolierung entfernt. Nach dem Druck- und Temperaturausgleich besitzen beide Kammern den gleichen Druck p und die gleich Temperatur T. Berechnen Sie diese mit Hilfe der Zustandsgleichungen für das ideale Gas.

(b) Anschliesend wird die Trennwand entfernt. Berechnen Sie die Änderung der Gesamtentropie ΔS aufgrund der Mischung, falls die Gase (1) verschieden und (2) identisch sind. Warum führt der 2. Fall zu einem Widerspruch?

2. Entropy from the number of states (5+2+3=10 Punkte)

(a) For a classical nonrelativistic ideal gas, calculate the number of states $\mathcal{N}(E)$ with given energy E.

(b) Compare the result for the entropy

$$S = k_B \log \mathcal{N}(E) \tag{1}$$

in the limit of large number of particles with the result obtained within the canonical ensemble.

(c) Find temperature and pressure.

3. Zustandsdichte in niedrigen Dimensionen: ($2+2=4$ Punkte)

In der Vorlesung haben Sie die Zustandsdichte des idealen Fermi-Gases in drei Dimensionen kennengelernt.

Berechnen Sie die Zustandsdichte

$$\rho(\varepsilon) = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}} \delta(\varepsilon - \varepsilon(\mathbf{k}))$$

des freien Teilchens für niedrigen Dimensionen $d = 1, 2$.

4. Besetsungszahlen in einem idealen Fermi-Gas: (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Wir bezeichnen mit n_λ die Zahl der Teilchen im Gas, die sich im Quantenzustand λ befinden. Für ein ideales Fermi-Gas zeigen Sie dass

(a)
$$\langle n_\lambda^2 \rangle = \langle n_\lambda \rangle,$$

(b)
$$\langle n_{\lambda_1} n_{\lambda_2} \rangle = \langle n_{\lambda_1} \rangle \langle n_{\lambda_2} \rangle.$$

(c) Berechnen Sie die Schwankung der Gesamtteilchenzahl $(\Delta N)^2 = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$ und zeigen Sie dass
$$\frac{\Delta N}{\langle N \rangle} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\langle N \rangle}}; \quad \frac{\Delta N}{\langle N \rangle} \to 0 \quad (\text{für } T \to 0).$$

5. Thermodynamik des idealen Fermi-Gases: (10 Punkte)

Betrachten Sie das ideale Fermi-Gas bei $T = 0$. Berechnen Sie (als Funktion vom Fermi-Impuls p_F):

(a) die Gesamtteilchenzahl N, (2 Punkte)

(b) die innere Energie U. (2 Punkte)

Betrachten Sie jetzt das Großkanonische Potential Ω im Limes $T \to 0$.

(c) Berechnen Sie $\Omega(T, V, \mu)$ direkt. (2 Punkte)

Hinweis: Verwenden Sie die Zustandsdichte $\rho(\epsilon)$ und zeigen Sie mit Hilfe der partiellen Integration, dass
$$\Omega = -V \int_0^\infty d\epsilon\, a(\epsilon) n_F(\epsilon), \quad a(\epsilon) = \int_0^\epsilon d\epsilon' \rho(\epsilon').$$

Den Grenzwert von Ω im Limes $T \to 0$ soll man nach der partiellen Integration berechnen.

(d) Verwenden Sie die erhaltenen Werte von Ω, U und N und überprüfen Sie, dass gilt (2 Punkte)
$$\Omega = U - TS - \mu N.$$

(e) Berechnen Sie den Druck des idealen Fermi-Gases bei $T = 0$. (2 Punkte)

Hinweis:
$$P = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial V}\right)_{T,\mu}.$$

6. Bonusaufgabe: Zwischenklausur, Aufgabe 3f $(6 + 6 + 3 = 15$ Punkte)

Betrachten Sie ein System aus N nicht miteinander wechselwirkenden Spins, die an ein äußeres Magnetfeld $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ koppeln:

$$E_{\{s_i\}} = -\mu B \sum_{i=1}^{N} s_i \qquad \text{mit } s_i = \pm 1.$$

Das Spinsystem werde bei einer Magnetfeldstärke $B_1 > 0$ durch Kopplung an ein Wärmebad auf die Temperatur $T_1 > 0$ gebracht und anschließend wärmeisoliert. Ändert man nun das Magnetfeld auf einen neuen Wert $B_2 > 0$. Das Spinsystem sei nun über einen Wärmleiter mit einer Probe mit konstanter Wärmekapazität C_V^{Probe} verbunden, welche zuvor auf die Temperatur T_1 gebracht wurde. Finden Sie die Temperatur T_*, die Spinsystem und Probe nach dem Temperaturausgleich besitzen für

(a) $k_\mathrm{B}T_1 > k_\mathrm{B}T_2 \gg \mu B_2$,

(b) $\mu B_2 \gg k_\mathrm{B}T_1 > k_\mathrm{B}T_2$ unter der Annahme, dass $k_B N / C_V^{\text{Probe}} \lesssim 1$.

(c) Was muss man machen um $T_* = 0$ zu erreichen?