Übungen zur Theoretischen Physik F SS 12

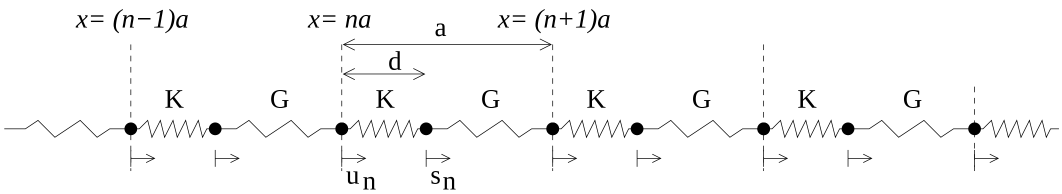
Prof. Dr. Jörg Schmalian
Dr. Igor Gornyi

Blatt 6: 30 Punkte + 15 Bonuspunkte
Besprechung 01.06.2012

Die Wahl der Bonusaufgabe ist jedem selbst überlassen.

1. Harmonische Kette: (5 + 5 = 10 Punkte)

$2N$ identische Massen m können sich auf der x-Achse reibungsfrei bewegen und sind abwechselnd mit unterschiedlichen Federn $K > G$ verbunden:



Es sollen die klassischen Bewegungsgleichungen für kleine Auslenkungen u_n und s_n aus den jeweiligen Ruhelagen bei $x = na$ und $x = (na + d)$ gelöst werden. Die Lagrange-Funktion lautet

$$\mathcal{L}(u_n, s_n, \dot{u}_n, \dot{s}_n) = T - U, \quad \text{wobei} \quad U = \frac{K}{2}\sum_n (u_n - s_n)^2 + \frac{G}{2}\sum_n (u_{n+1} - s_n)^2,$$

(a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen. Zeigen Sie dann für den Ansatz

$$u_n(t) = u\, e^{i(kx-\omega t)}, \quad s_n(t) = s\, e^{i(kx-\omega t)}, \quad x = na,$$

dass periodische Randbedingungen

$$u_{n+N}(t) = u_n(t), \quad s_{n+N}(t) = s_n(t)$$

auf die Einschränkung

$$k = \frac{2\pi}{a}\frac{m}{N}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

führen, und dass für eine eindeutige Lösung $-\frac{\pi}{a} < k \leq \frac{\pi}{a}$ gelten muß.

(b) Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen als 2×2–Matrix und bestimmen Sie nun die Frequenzen $\omega_+(k)$, $\omega_-(k)$ der Eigenmoden der Kette, geben Sie jeweils auch s/u an. Wie verhalten sich $\omega_\pm(k)$ und s/u für kleine $|k| \ll \pi/a$? Was bedeutet das Ergebnis anschaulich? Skizzieren Sie $\omega_\pm(k)$ für alle erlaubten k. Wie viele akustische $(-)$ und optische $(+)$ Eigenmoden besitzt die Kette?

2. Phononen: $(3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$ Punkte)

Die in Aufgabe 1 berechneten Gitterschwingungen haben die Form harmonischer Oszillatoren und können somit wie aus der Quantenmechanik bekannt quantisiert werden. Die so entstandenen Schwingungszustände heißen akustische bzw. optische Phononen und die Besetzungszahl eines Schwingungszustands gehorcht der Bose-Einstein-Statistik.

Geben Sie den Hamilton-Operator für jede Mode $\lambda \equiv (k, \pm)$ an ($\pm$ steht für optisch/akustisch). Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme und die innere Energie. Der Einfachheit halber betrachten wir im Folgenden nur eine räumliche Dimension.

(a) Betrachten Sie den Limes hoher Temperaturen und zeigen Sie, dass Sie die klassischen Resultate für U (Gleichverteilungssatz) und C_V (Dulong-Petit) finden.

(b) Wie Sie in Aufgabe 1 gezeigt haben, gibt es für jede noch so tiefe Temperatur T Schwingungseigenfrequenzen ω_λ mit $\hbar\omega_\lambda < k_B T$, da ja zumindest die Frequenzen der immer vorhandenen akustischen Phononen gegen 0 gehen für $k \to 0$. Daher ist eine Entwicklung nach dem kleinen Parameter $\frac{k_B T}{\hbar\omega_\lambda} \ll 1$ nicht möglich, zumindest nicht für die akustischen Phononenzweige. Wir können aber annehmen, dass für tiefe Temperaturen nur noch akustische Zweige zum physikalischen Verhalten beitragen und nähern $\omega_\lambda = c_a k$. Bestimmen Sie die innere Energie U und die spezifische Wärme C_V in diesem Limes.

Hinweis: Ersetzen Sie die k-Summe wie üblich durch ein Integral, substituieren Sie und verschieben die obere Integrationsgrenze nach ∞. Warum? Das resultierende Integral besitzt eine exakte Lösung: $\int_0^\infty dx \frac{x}{e^x - 1} = \pi^2/6$.
Die vorgenommen Näherung entspricht im Wesentlichen dem Debye-Modell. Im allgemeinen wird allerdings die Integralgrenze nicht nach ∞ geschoben, so dass Korrekturen zur Temperaturabhängigkeit auftreten und die Resultate auch für "mittlere" Temperaturbereiche gültig werden.

(c) Nun wollen wir die noch stärkere Näherung $\omega_\lambda = \omega_0 =$ const. für alle λ verwenden. Berechnen Sie wiederum U und C_V. Zeigen Sie, dass Sie für große Temperaturen wiederum das Dulong-Petit'sche Gesetz finden und dass für tiefe Temperaturen U und C_V exponentiell verschwinden ($T \to 0$). Argumentieren Sie, dass dieses Resultat mit dem Ergebnis aus Aufgabe 1 konstistent ist.

Diese Näherung wird auch als Einstein-Modell bezeichnet und liefert für optische Phononen brauchbare Resultate.

(d) Wiederholen Sie die Rechnung aus (a) für das Debye-Modell in drei räumlichen Dimensionen ($d = 3$). In dem Modell wird das Spektrum der akustischen Zweige $\omega_\lambda = ck$ bei einer gewissen endlichen Frequenz ω_D abgebrochen. Bestimmen Sie ω_D durch die Bedingung, dass die Gesamtzahl der Schwingungen den reichtigen Wert ($3N\nu$) hat (hier N ist die Zahl der Elementarzellen eines Körpers und ν ist die Zahl der Atome in einer Zelle).

(e) Wiederholen Sie die Rechnung aus (b) für drei räumliche Dimensionen ($d = 3$) und leiten Sie das T^3–Gesetz für C_V her. Diesmal wird Ihnen das folgende Integral begegnen: $\int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1} = \pi^4/15$.

3. Ideal Bose gas (5+5=10 Punkte)

(a) Consider an ideal Bose gas in d-dimension with chemical potential $\mu = 0$ and dispersion relation

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon_0 \left(\frac{|\mathbf{p}|}{p_0}\right)^a . \tag{1}$$

Here ε_0 and p_0 are constants of dimension energy and momentum, respectively. Find the leading contribution to the low temperature specific heat for arbitrary d and a. Examples are photons and phonons with $a = 1$ or magnetic excitations in ferromagnets with $a = 2$.

(b) Consider an ideal gas of bosons with dispersion relation

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \Delta + \frac{D}{2p_0^2}\left(\mathbf{p}^2 - p_0^2\right)^2 \tag{2}$$

where Δ, D and p_0 are constants. Find the specific heat for $k_B T \ll \Delta$ and $\Delta \ll k_B T \ll D p_0^2$. How does the result depend on dimensionality?

4. Das relativistische entartete Fermi-Gas: (10 Punkte)

Wird das Gas komprimiert, so nimmt die mittlere Energie der Elektronen zu (E_F wächst); wird sie mit mc^2 vergleichbar, so werden relativistische Effekte wesentlich. Wir betrachten hier ausführlich das vollständig entartete ultrarelativistische Elektronengas, die Energie seiner Teilchen soll groß im Vergleich zu mc^2 sein. Bekanntlich hängt in diesem Fall die Energie eines Teilchens mit seinem Impuls durch die Beziehung

$$\epsilon = ck$$

zusammen. Dieses Modell kann man z.B. verwenden, um die Elektronen in Graphen zu beschreiben.

Bestimmen Sie bei $T = 0$ die Beziehungen zwischen der Gesamtteilchenzahl N und

(a) dem Grenzimpuls p_F; (1 Punkte)

(b) der Grenzenergie E_F; (1 Punkte)

(c) der Gesamtenergie des Gases $U(T = 0)$, (1 Punkte)

(d) dem Gasdruck P. (1 Punkte)

(e) Überprüfen Sie, dass gilt (1 Punkte)

$$PV = \frac{1}{3}U.$$

Wenn $T \neq 0$, dann kann man die Thermodynamische Größe durch die Integrale über die Fermi-Funktion ausdrücken. Bestimmen Sie auf diesem Weg

(f) das großkanonische Potential Ω; (2 Punkte)

(g) die innere Energie U. (2 Punkte)

(h) Überprüfen Sie, dass gilt (1 Punkte)

$$\Omega = -\frac{1}{3}U.$$