Übungen zur Theoretischen Physik F SS 12

Prof. Dr. Jörg Schmalian | **Blatt 9: 30 Punkte + 10 Bonuspunkte**
Dr. Igor Gornyi | **Besprechung 22.06.2012**

---

1. Relation zwischen Suszeptibilität und Korrelatoren im Ising-Modell:
(6 + 12 = 18 Punkte)

Im Ising-Modell können die Spins, die das magnetische Moment der Atome oder Ionen bestimmen, nur zwei diskrete Zustände annehmen können. Vereinfachend kommt dazu, dass nur eine Komponente (s^z) der Spins im Hamiltonoperator auftaucht:

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j - \mu B \sum_i S_i, \tag{1}$$

wobei B das externe Magnetfeld ist und $S_i = 2s_i^z = \pm 1$.

(a) Benutzen Sie den allgemeinen Ausdruck $Z = \mathrm{Sp}\left\{e^{-H/(k_B T)}\right\}$ für die Zustandssumme des durch den Hamiltonoperator (1) beschriebenen Ising-Modells, um die Relation zu beweisen:

$$\chi \equiv \frac{\partial M}{\partial B} = \frac{1}{k_B T}\left[\sum_{i,j} \langle S_i S_j \rangle - \left\langle \sum_i S_i \right\rangle^2\right] .$$

(b) Bestimmen Sie die Korrelationsfunktion

$$g(n) = \langle S_i S_{i+n} \rangle - \langle S_i \rangle^2.$$

für das eindimensionale Ising-Modell:

$$H = -J \sum_i^N S_i S_{i+1} - \mu B \sum_i^N S_i, \qquad S_{N+1} = S_1, \tag{2}$$

Hinweis: Finden Sie die Transfermatrix im Magnetfeld. Drücken Sie die Korrelationfunktion durch die Transfermatrizen aus.

2. Molekularfeld-Näherung für das Ising-Modell: (12 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie die Molekularfeld-Näherung für das Ising-Modell kennegelernt (Kapitel 6.4.2):

$$H = -\sum_i \left(zJ\langle S \rangle + \mu B\right) S_i - \frac{z}{2} N \langle S \rangle^2$$

wobei z die Zahl der nächsten Nachbarn ist.

Bestimmen Sie die Wärmekapazität bei festem Feld C_B in der Nähe des Phasenübergangs. Was ist der Wert des entsprechenden kritischen Exponenten?

3. Bonusaufgabe: Magnetischer Phasenübergang (10 Punkte)

Betrachten Sie ein System von N Ionen mit Spin $1/2$. Nehmen Sie an, dass bei $T = 0$ das System ferromagnetisch und bei höheren endlichen Temperaturen ($T > T_0$) das System paramagnetisch ist.

Betrachten Sie eine sehr vereinfachte Theorie des Phasenübergangs zwischen den beiden Phasen. Laut dieser Theorie ist die Wärmekapazität als Funktion der Temperatur

$$C = \begin{cases} C_{max}\left(\dfrac{2T}{T_0} - 1\right), & \dfrac{T_0}{2} < T < T_0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Finden Sie C_{max} als Funktion von N.