

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 12**Prof. Dr. Jörg Schmalian**
Dr. Igor Gornyi**Blatt 12: 20 Punkte + 15 Bonuspunkte**
Besprechung 13.07.2012

Die Wahl der Bonusaufgabe ist jedem selbst überlassen.

1. Master-Gleichung:

(5 + 5 = 10 Punkte)

Ein Kasten A vom Volumen V sei mit einem viel größeren Kasten B durch ein kleines Loch verbunden (Teilchen können das Loch nur einzeln passieren). Die Wahrscheinlichkeit, dass in der Zeit Δt ein Gasteilchen von A nach B geht, sei proportional zu $n\Delta t/V$ (n : Zahl der Teilchen in A), und die Wahrscheinlichkeit von B nach A zu gehen sei proportional zu (gleiche Proportionalitätskonstante) $\rho\Delta t$ (ρ : konstante Teilchendichte in B).

- (a) $P(n, t)$ sei die Wahrscheinlichkeit, zur Zeit t gerade n Teilchen in A zu finden. Schreiben Sie die Gleichung für $P(n, t)$ (Mastergleichung) auf und lösen Sie sie für den stationären Fall.
- (b) Bestimmen Sie $\langle n(t) \rangle$, indem Sie das erste Moment der Mastergleichung bilden und die entstehende Differentialgleichung lösen.

2. Langevin-Gleichung: LRC -Schwingkreis

(3 + 3 + 4 = 10 Punkte)

Wir betrachten einen stromgetriebenen LRC -Schwingkreis. Das Gleichgewicht der Ströme führt zur Bewegungsgleichung

$$C\ddot{V} + \frac{\dot{V}}{R} + \frac{V}{L} - \dot{I}_0 = \delta I.$$

wobei $I = V/R - \delta I$ der Strom durch den Widerstand ist; δI beschreibt Nyquist-Rauschen, d.h. es gilt

$$\langle \delta I(t) \delta I(t') \rangle = \frac{2k_B T}{R} \delta(t - t').$$

- (a) Bestimmen Sie die Impedanz $Z(\omega) = V(\omega)/I(\omega)$ durch Fouriertransformation der Bewegungsgleichung.
- (b) Bestimmen Sie $\langle \delta V(\omega) \delta V(\omega') \rangle$.
- (c) Berechnen und skizzieren Sie die Korrelationen des Spannungsrauschens $\langle \delta V(t) \delta V(t') \rangle$ im Fall $(2RC)^2 > LC$.

3. Damping with memory

(2 + 3 + 4 + 3 + 3 = 15 Punkte)

Consider the Drude-model of quantum dissipation with the equation of motion,

$$m\ddot{x} + m \int_0^t ds K(t-s)\dot{x}(s) = F(t).$$

Here damping is described by a damping kernel $K(t) = \Theta(t)\gamma_0\omega_d e^{-\omega_d t}$, with $\Theta(t)$ the Heaviside step function.

- (a) Analyze the limit $\omega_d \rightarrow \infty$.
- (b) The equation of motion can be solved employing the Laplace-transform method. Find an equation for the Laplace transform of $x(t)$,

$$\tilde{x}(z) = \int_0^\infty dt x(t)e^{-zt}.$$

Start with deriving formulas for the Laplace transform of derivatives and convolutions of functions.

- (c) The susceptibility $\tilde{\chi}(z)$ is defined by the relation

$$\tilde{x}_0(z) = \tilde{\chi}(z)\tilde{F}(z),$$

where $\tilde{x}_0(z)$ is the part of $\tilde{x}(z)$ independent of initial conditions. Demonstrate that

$$\tilde{\chi}(z) = \frac{1}{m} \frac{z + \omega_d}{z(z^2 + z\omega_d + \gamma_0\omega_d)}.$$

- (d) Find the inverse Laplace transform of the susceptibility

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dz e^{zt} \tilde{\chi}(z), \quad t > 0, \quad c > 0,$$

using contour integration and the residue theorem.

- (e) Consider now a constant driving force $F(t) = F_0$ for $t > 0$. Find the behavior of $x(t)$ in the long-time limit, $t \rightarrow \infty$.