Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Festkörperphysik

Übungen zu Moderne Theoretische Physik III SS 13

Prof. Dr. G. Schön

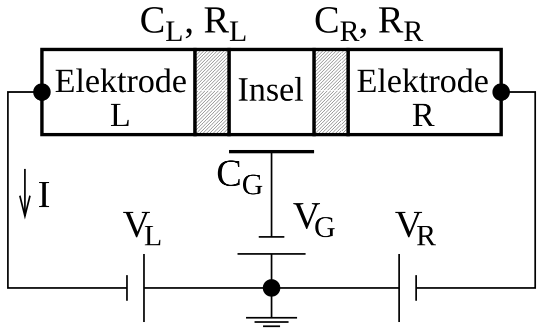
Dr. M. Marthaler, Dr. A. Poenicke

Blatt 5

Besprechung, 17.05.2013

1. Master-Gleichung für den Einzelelektronentransistor: 20 Punkte

Eine kleine metallische Insel sei über zwei Tunnelkontakte links und rechts an Zuleitungen angeschlossen, deren elektrostatische Potentiale $V_{L,R}$ von zwei Spannungsquellen eingestellt werden. Die Tunnelbarrieren sind, wie im Folgenden gezeigt wird, durch einen elektrischen Widerstand $R_{L,R}$ charakterisiert. Außerdem stellen sie eine Kapazität dar. Weiterhin ist eine dritte Spannungsquelle mit Potential V_G rein kapazitiv an die Insel gekoppelt. (Siehe Abbildung.)



Durch Tunneln einzelner Elektronen (mit Elementarladung $-e < 0$) kann sich die Gesamtladung $-Ne$ auf der Insel (relativ zu einem neutralen Ausgangszustand) nur um ganzzahlige Vielfache von e ändern. Allerdings ist die Zahl N nicht fest, sondern fluktuiert wegen der stochastisch auftretenden Einzelelektronen-Tunnelprozesse von oder zu der Insel.

Die obige Anordnung lässt sich aufteilen in das uns interessierende *System*, die Insel mit den drei Kondensatoren, und die angekoppelten Teilchenreservoire, nämlich die Elektroden mit kontrollierten elektrischen Potenzialen. Die innere Energie unseres Systems ist die in den Kondensatoren gespeicherte elektrostatische Energie

$$U = \frac{Q_L^2}{2C_L} + \frac{Q_R^2}{2C_R} + \frac{Q_G^2}{2C_G}. \tag{1}$$

Sie hängt ab von den auf den beiden Kondensatorplatten lokalisierten Ladungspaaren, $-Q_j = C_j(V_I - V_j)$ auf der Insel und Q_j auf der anderen Seite für $j = L, R, G$. Diese Polarisationsladungen sind nicht quantisiert, aber für ihre Summe gilt $Ne = Q_L + Q_R + Q_G$. V_I ist das noch unbekannte Potenzial der Insel.

(a) (4 Punkte) Welches ist in der beschriebenen Anordnung mit Teilchenaustausch und festgehaltenen Spannungen das passende thermodynamische Potential E mit der Eigenschaft dass es im Gleichgewicht minimal ist? D.h. welche Legendre-Transformierte müssen Sie betrachten? Zeigen Sie, dass gilt

$$E(N) = \frac{(Ne + Q_x)^2}{2C} - \frac{1}{2}\sum_j C_j V_j^2 \tag{2}$$

Hinweis: Drücken Sie die Ladungen Q_j sowie das elektrostatische Potential V_I der Insel als Funktion von N und den extern kontrollierten Spannungen aus. Es ergibt sich ein kompakter Ausdruck, wenn Sie die Variable $Q_x = \sum_j C_j V_j$ und Gesamtkapazität der Insel $C = \sum_j C_j$ einführen.

(b) (6 Punkte) Die Rate für einen Prozess, bei dem ein Elektron von der j^{ten} Elektrode auf die Insel tunnelt und damit deren Ladunszustand von N auf $N+1$ ändert, sei mit $\Gamma_{jI}(N)$ bezeichnet. Die analogen, in umgekehrter Richtung verlaufenden und dabei die Ladungszahl von N auf $N-1$ verringernden Prozesse haben die Raten $\Gamma_{Ij}(N)$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die Insel zur Zeit t im Ladungszustand N befindet, sei mit $P_N(t)$ bezeichnet. Stellen Sie die Mastergleichung für $P_N(t)$ auf.

Lösen Sie diese unter der Voraussetzung, dass nur zwei Ladungszustände n und $n+1$ der Insel energetisch erreichbar sind (d.h., die Raten für den Übergang zu anderen Zuständen verschwinden). Was ergibt sich im stationären Grenzfall und wann ist dieser erreicht?

(c) (6 Punkte) Der Strom I durch das system ist in dem betrachteten stationären Grenzfall gegeben durch $I = -e\{\Gamma_{LI}(n)P_n - \Gamma_{IL}(n+1)P_{n+1}\}$. Mithilfe der Ergebnisse von (b) können Sie I allein durch die Tunnelraten ausdrücken. Interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch: Warum nennt man die betrachtete Situation das Regime 'sequentiellen Tunnelns'?

Verallgemeinerung der in Aufgabe 3(d) des Übungsblatt 3 durchzuführenden Rechnung auf den hier betrachteten Fall liefert die Tunnelraten

$$\Gamma_{jI}(N) = \frac{1}{e^2 R_j}\frac{\Delta E(N) - eV_j}{\exp[\frac{\Delta E(N)-eV_j}{kT}] - 1}, \quad \Gamma_{Ij}(N+1) = \frac{1}{e^2 R_j}\frac{-\Delta E(N) + eV_j}{\exp[\frac{-\Delta E(N)+eV_j}{kT}] - 1}.$$

Hierbei ist $\Delta E(N) = E(N+1) - E(N)$ die durch das Hinzufügen eines Elektrons zur Insel im Ladungszustand N herbeigeführte Änderung der freien Energie. Es hat die Bedeutung eines effektiven chemischen Potentials für die Insel. Da dieses wegen der Ganzzahligkeit von N nur diskrete Wete annimmt, sieht es so aus, als ob es auf der Insel diskrete Energieniveaus gibt. Zeichen Sie das entsprechende 'Energieniveauscheme'. Was ist der 'Niveauabstand'?

(Beachten Sie aber, dass diese 'Quantisierung' kein quantenmachanischer Effekt, sondern allein durch die Quantisierung elektrischer Ladungen in Einheiten der Eletronenladung bedingt ist.)

(d) (4 Punkte) Im Folgenden betrachten wir die Situation identischer Tunnelkontakte ($C_L = C_R$, $R_L = R_R$) und symmetrischer Vorspannung ($V_L = -V_R = V/2$). Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit der von uns betrachtete Fall eintritt, dass nur zwei Ladungszustände eine Rolle spielen?

Bei endlicher Vorspannung kann ein Strom durch die Insel fließen. Berechnen Sie die Kennlinie $I(V)$ bei $T = 0$. Warum ist das System ein *Einzelelektronen-Transistor*?