Übungen zu Moderne Theoretische Physik III SS 13

Prof. Dr. G. Schön
Dr. M. Marthaler, Dr. A. Poenicke

Blatt 9
Besprechung, 21.06.2013

---

1. Bose-Einstein-Kondensation in Atomfallen: $(2 + 3 + 4 + 6 = 15$ Punkte)

In der Vorlesung wurde der idealisierte Fall eines uniformen Bose-Gases betrachtet, bei dem die Bose-Teilchen in einem Kasten vom Volumen V eingeschlossen sind. Hier soll die Bose-Einstein-Kondensation in Atomfallen behandelt werden, die von E. Cornell, W. Ketterle und C. Wieman nachgewiesen wurde, wofür sie 2001 mit dem Physik-Nobelpreis ausgezeichnet wurden. Die verwendeten magneto-optischen Fallen erzeugen mit guter Genauigkeit ein asymmetrisches Oszillatorpotential

$$V(x,y,z) = \frac{m}{2}\left\{\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2\right\} . \qquad (1)$$

Um Bose-Einstein-Kondensation zweifelsfrei nachweisen zu können, war es nötig, die thermodynamischen Eigenschaften eines im Potential $V(x,y,z)$ befindlichen Bose-Gases zu verstehen. Diese unterscheiden sich teilweise drastisch vom uniformen Fall.

(a) Zeigen Sie, dass die Einteilchen-Eigenzustände eines im Potential $V(x,y,z)$ befindlichen Teilchens (also des dreidimensionalen harmonischen Oszillators) durch

$$E_{\vec{l}} = \hbar\left\{\omega_x l_x + \omega_y l_y + \omega_z l_z\right\} + E_0, \qquad E_0 = \frac{\hbar}{2}\left\{\omega_x + \omega_y + \omega_z\right\} \qquad (2)$$
$$\vec{l} = (l_x, l_y, l_z), \quad l_\alpha = 0,1,2,3\ldots \ (\alpha = x,y,z)$$

gegeben sind. (Dazu verwenden Sie am einfachsten einen Separationsansatz.)

(b) Betrachten Sie den bei der Bose-Einstein-Kondensation makroskopisch besetzten Zustand in der Falle. Welche Wellenfunktion hat dieser in Orts- bzw . Impulsdarstellung? Wie sieht die entsprechende Dichte- bzw. Geschwindigkeitsverteilung aus? Was ist das typische Volumen V welches das Kondensat in diesem Zustand einnimmt? Vergleichen Sie mit der Situation des uniformen Bose-Gases. Was ändert sich qualitativ durch die Existenz des äußeren Potentials?

(c) Wir nehmen nun an, dass sich N Bosonen im Potential $V(x,y,z)$ befinden. Zeigen Sie, ausgehend von der bosonischen Besetzungszahlverteilung, dass gilt:

$$N = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{z}^j \sum_{l_x,l_y,l_z} e^{-j\beta \tilde{E}_{\vec{l}}} = \frac{\tilde{z}}{1-\tilde{z}} + \sum_{j}^{\infty} \tilde{z}^j \sum_{\vec{l}\neq 0} e^{-j\beta \tilde{E}_{\vec{l}}} , \qquad (3)$$

mit $\beta = 1/(k_\mathrm{B}T)$, der Fugazität $\tilde{z} = \exp\{\beta(\mu - E_0)\}$ und $\tilde{E}_{\vec{l}} = E_{\vec{l}} - E_0$.
Hier ist die Besetzungszahl des Einteilchengrundzustands $N_0 = \tilde{z}/(1-\tilde{z})$. Im Grenzfall hoher Temperatur, d.h. $k_\mathrm{B}T \gg \max\{\hbar\omega_x, \hbar\omega_y, \hbar\omega_z\}$, kann man die Summe über die angeregten Zustände durch Integrale ersetzen:

$$\sum_{l_x,l_y,l_z} \cdots \to \int_0^\infty \mathrm{d}l_x \int_0^\infty \mathrm{d}l_y \int_0^\infty \mathrm{d}l_z \cdots . \qquad (4)$$

Werten Sie diese aus, um $N - N_0$ als Funktion der Fugazität $\tilde{z}$ und der Temperatur zu finden. Zeigen Sie, dass $\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3$ und finden Sie die kritische Temperatur T_c als Funktion der Teilchenzahl N. (Benutzen Sie dabei die Abschätzung $g_3(\tilde{z}) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{z}^j / j^3 \leq g_3(1) \equiv \zeta(3)$.)

(d) Mittels der Zustandsdichte $N(E)$ lässt sich die Zahl von Boseteilchen in angeregten Zuständen allgemein in der Form

$$N - N_0 \quad = \quad V \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{z}^j \int_0^{\infty} \mathrm{d}E N(E) e^{-j\beta E} \tag{5}$$

schreiben, wobei die Zustandsdichte der Anregung einer dreidimensionalen Atomfalle durch

$$N(E) = \frac{1}{V} \sum_{\vec{l} \neq 0} \delta(E - \tilde{E}_{\vec{l}})$$

gegeben ist. Benutzen Sie die Relation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E}\Theta(E) = \delta(E)$ sowie die Ersetzung (4), um $N(E)$ für ein harmonisches Potential in den Dimensionen $D = 3, 2$ und 1 zu bestimmen und berechnen Sie jeweils $N - N_0$ durch Einsetzen in Gl. (5). Wiederholen Sie die Rechnung für den Fall eines uniformen Bose-Gases. [Hinweis: Die Zustandsdichte ist in diesem Fall durch $N_u(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^D} \int \mathrm{d}^D p \; \delta(E - \frac{p^2}{2m})$ gegeben.] Für welche Raumdimensionen tritt Bose-Einstein-Kondensation im Fall des Bose-Gases in einer Atomfalle, in welchen im uniformen Bose-Gas auf? Wie hängt jeweils T_c von der Teilchendichte ab? Begünstigt oder erschwert ein äußeres Potential das Auftreten von Bose-Einstein-Kondensation?

2. Planck'sches Strahlungsgesetz: $(2 + 3 = 5$ Punkte$)$

Die Oberflächentemperatur eines Sternes lässt sich über die Frequenz abschätzen, bei der das Maximum der vom Stern emittierten Strahlungsenergie liegt.

(a) Berechnen Sie das Maximum der spektralen Energiedichte aus dem Planck'schen Strahlungsgesetz.

(b) Berechnen Sie aus den experimentell ermittelten Wellenlängen für bestimmte kosmische Objekte die zugehörigen Temperaturen. Die folgenden Wellenlängen gehören zum Maximum der Frequenzverteilung:

(i) Grundstrahlung des Weltalls: $\lambda_{\text{max}} = 0.16$ cm

(ii) Erdoberfläche: $\lambda_{\text{max}} = 1.6 \cdot 10^{-3}$ cm

(iii) Sonnenoberfläche: $\lambda_{\text{max}} = 0.8 \cdot 10^{-4}$ cm