Moderne Theoretische Physik III SS 2014

Prof. Dr. J. Schmalian
Dr. U. Karahasanovic, Dr. P. P. Orth

Blatt 01, 100 Punkte
Abgabe 25.04.2014

---

1. Stirlingformel und Wahrscheinlichkeiten $(5 + 5 + 7 + 8 = 25$ Punkte, schriftlich)

(a) Beweisen Sie die Stirlingsche Näherungsformel

$$\ln n! \approx n \ln n - n, \quad n \gg 1. \tag{1}$$

Benutzen Sie hierzu die Definition von $n!$ über die Gammafunktion

$$\Gamma(n+1) = n! = \int_0^\infty dx\, x^n\, e^{-x} \tag{2}$$

und berechnen Sie das Integral näherungsweise mit der Sattelpunktsmethode. Zeigen Sie hierzu, dass der Logarithmus des Integranden ein Maximum bei $x = n$ besitzt und entwickeln Sie bis zur quadratischen Ordnung in der Variablen $x - n$. Dies liefert ein leicht auszurechnendes Gaußsches Integral.

(b) Ab wie vielen Studenten ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Studenten am gleichen Tag Geburtstag haben, größer als 1/2 ?

(c) Eine Münze, die entweder das Ergebnis „Kopf" oder das Ergebnis „Zahl" ergibt, werde n-mal geworfen, wobei $n \gg 1$ sei. Das Ergebnis „Kopf" werde n_1-mal gezählt, das Ergebnis „Zahl" n_2-mal, was die Wahrscheinlichkeiten $p_1 = n_1/n$ und $p_2 = n_2/n$ für die beiden Events ergibt.

Berechnen Sie die Anzahl der verschiedenen Konfigurationen $w(n_1, n_2, n)$ die zum Ergebnis $\{n_1, n_2\}$ nach n Würfen führen, d.h. n_1-mal „Kopf", n_2-mal „Zahl" und $n_1 + n_2 = n$. Bestimmen Sie das Maximum der Funktion w und damit die wahrscheinlichsten Werte für p_1 und p_2.

(d) Zeigen Sie nun, dass dieses Maximum scharf wird im Limes $n \to \infty$. Zeigen Sie dazu, dass sich die Funktion w schreiben lässt als

$$w\Big(\frac{n}{2} - m, \frac{n}{2} + m, n\Big) = \tilde{w}(p, 1-p, n) \approx w\Big(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, n\Big) e^{-2m^2/n}\,, \tag{3}$$

wobei $p = \frac{1}{2} - \frac{m}{n}$ und $n \gg m \gg 1$ angenommen wird. Bestimmen Sie die Breite dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung $\tilde{w}$.

2. Funktionaldeterminantenkalkül $(5 + 10 + 10 = 25$ Punkte, schriftlich)
Gegeben seien die Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ mit unabhängigen Variablen x und y. Als Funktionaldeterminante bezeichnet man

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_y & \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_x \\ \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_y & \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_x \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie dass folgende Relationen gelten

$$\frac{\partial(u,y)}{\partial(x,y)} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_y \tag{4}$$

$$\frac{\partial(x,v)}{\partial(x,y)} = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_x$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -\frac{\partial(v,u)}{\partial(x,y)} = -\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,x)} \tag{5}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)} = \frac{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}}\,. \tag{6}$$

(b) Es sei nun ein funktionaler Zusammenhang zwischen den Variablen x und y durch die Relation $\phi(x,y) = z = \text{const.}$ gegeben, der eine Abhängigkeit $y = y(x)$ herstellt. Zeigen Sie, daß dann gilt

$$\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_\phi = \left(\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_\phi\right)^{-1} \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_\phi = -\frac{\left.\dfrac{\partial \phi}{\partial x}\right|_y}{\left.\dfrac{\partial \phi}{\partial y}\right|_x}\,. \tag{8}$$

Bemerkung: Wir schreiben in den obigen Beziehungen oft einfach $z = z(x,y)$ und ersetzen die Funktion ϕ dann durch z.

(c) Betrachten Sie nun drei Variablen, die eine Bedingung $F(x,y,z) = 0$ erfüllen. Für zwei der Variablen gelte eine weitere Bedingung $w = w(x,y)$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\left.\frac{\partial x}{\partial w}\right|_z = \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z \left.\frac{\partial y}{\partial w}\right|_z \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z = \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_w + \left.\frac{\partial x}{\partial w}\right|_y \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_z\,. \tag{10}$$

3. Gummiband (8 + 10 + 7 = 25 Punkte, mündlich)

Für ein elastisches Gummiband der Länge l bei der Temperatur T und unter der Spannung J wurden experimentell folgende Beziehungen gemessen

$$\left(\frac{\partial J}{\partial T}\right)_l = \frac{al}{l_0}\left(1 - \left(\frac{l_0}{l}\right)^3\right) \tag{11}$$

$$\left(\frac{\partial J}{\partial l}\right)_T = \frac{aT}{l_0}\left(1 + 2\left(\frac{l_0}{l}\right)^3\right)\,. \tag{12}$$

Hier bezeichnet l_0 die Länge des ungedehnten Bands, die als temperaturunabhängig angenommen wird, und a ist eine Konstante.

(a) Bestimmen Sie die Zustandsgleichung des Systems, d.h. finden Sie die Spannung $J(T,l)$ als Funktion der Temperatur T und der Länge l des Gummibandes.

(b) Nehmen Sie an, dass die spezifische Wärme C_l bei konstanter Länge l temperaturunabhügig ist. Das Band werde nun von einer anfänglichen Länge l_0 und Temperatur T_0 auf adiabatische und reversible Weise auf eine finale Länge l_1 gedehnt. Berechnen Sie die finale Temperatur T_1.

(c) Das Band werde nun losgelassen, so dass es sich wieder auf seine natürliche Länge l_0 kontrahiert. Bestimmen Sie die Änderung der Entropie S unter der Annahme dass keine Wärme mit der Umgebung während dieses Prozesses ausgetauscht wird.

Hinweis: die Änderung der inneren Energie U des Gummibandes ist gegeben durch $dU = TdS + Jdl$, wobei Jdl die Arbeit bezeichnet die verrichtet wird um das Gummiband um die Strecke dl zu dehnen.

4. Ultrarelativistisches Bosegas (10 + 10 + 5 = 25 Punkte, mündlich)

Die innere Energie U eines ultrarelativistischen Gases von Bosonen, wie zum Beispiel Photonen, erfüllt $U = \sigma V T^4$, wobei σ die Stefan-Boltzmann Konstante und T die Temperatur bezeichnet. Der Druck eines solchen Systems erfüllt $p = U/3V$ wobei V das Volumen des Systems bezeichnet. Das chemische Potential des ultrarelativistischen Bosegases verschwindet $\mu = 0$. Diese Relationen folgen experimentellen Beobachtungen, später werden wir sie auch durch eine mikroskopische Theorie fundieren.

Analysieren Sie einen geschlossenen Carnotzyklus für das ultrarelativistische Bosegas. Dieser setzt sich aus den folgenden vier Schritten zusammen: isothermische Expansion $\to$ adiabatische Expansion $\to$ isothermische Kompression $\to$ adiabatische Kompression, und bestimmen Sie

(a)

$$\Delta Q = \oint \delta Q \,, \tag{13}$$

wobei das Integral über den geschlossenen Zyklus läuft und $\delta Q = \delta U + \delta W$ die Wärme bezeichnet und $\delta W = p \delta V$ die Arbeit.

(b)

$$\Delta S = \oint \frac{\delta Q}{T} \,, \tag{14}$$

wobei das Integrale über den geschlossenen Zyklus läuft.

(c) Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.