

Moderne Theoretische Physik III SS 2014

Prof. Dr. J. Schmalian

Blatt 02, 100 Punkte

Dr. U. Karahasanovic, Dr. P. P. Orth

Abgabe 02.05.2014

1. Würfel und Wahrscheinlichkeiten

(5 + 10 + 10 = 25 Punkte, schriftlich)

- (a) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\langle xy \rangle = \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle \neq 0$ nur gilt, falls die Variablen x und y statistisch nicht unabhängig (d.h. korreliert) sind. Zeigen Sie, dass der Umkehrschluss falsch ist, d.h. zeigen Sie dass falls x und y statistisch nicht unabhängig sind, daraus nicht unbedingt folgt dass $\langle xy \rangle \neq 0$. (Finden Sie z.B. ein Gegenbeispiel.)
- (b) Es sind zwei Würfel gegeben, die die Werte 1 bis 6 mit gleicher Wahrscheinlichkeit annehmen. Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung ihrer Summe $P(s)$ mit $s = x + y$, wobei x und y die Zufallsvariablen des Würfels 1 und des Würfels 2 sind.
- (c) Bestimme $P(s)$ für den Fall, dass einer der Würfel 4 Seiten und der andere 6 Seiten hat.

2. Allgemeine thermodynamische Funktion I

(8 + 8 + 9 = 25 Punkte, schriftlich)

Nehmen Sie an, dass wir einige Terme von einer Reihenentwicklung der Gibbs-Energie als eine Funktion der Variablen T und P für eine Umgebung nahe dem Punkt (T_0, P_0) kennen.

$$G = AT + BT^2 + CP + DP^2 + ETP \quad (1)$$

wobei A, B, C, D und E Konstanten sind.

- (a) Bestimmen Sie das Volumen des Systems als eine Funktion von T und P .
- (b) Die isothermische Kompressibilität ist definiert als

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{T,N} \quad (2)$$

Bestimmen Sie κ_T für dieses System.

- (c) Bestimmen Sie die Entropie als eine Funktion von T und P für dieses System.

3. Spin $S = 1$ in einem Magnetfeld

(12 + 13 = 25 Punkte, mündlich)

Betrachten Sie ein System aus N nichtwechselwirkenden Teilchen mit Spin $S = 1$ in einem Magnetfeld $\mathbf{B}$. Der Hamilton-Operator eines solchen Systems ist durch $\mathcal{H} = -\mu \sum_{i=1}^N S_i^z B$ gegeben, wobei S_i^z hier die Werte $-1, 0$ und 1 annehmen kann und μ das magnetische Moment eines Spins bezeichnet.

- (a) Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme Z eines solchen Systems.
- (b) Berechnen Sie die durchschnittliche Magnetisierung

$$\langle M \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \log Z}{\partial B} \quad (3)$$

eines solchen Systems. Zeichnen Sie diese als Funktion des Magnetfelds B .

4. Harmonischer Oszillator (12 + 13 = 25 Punkte, mündlich)
Betrachten Sie den harmonischen Oszillator mit Hamiltonian

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (4)$$

wobei m die Masse, ω die Frequenz, p den Impuls und x den Ort bezeichnen. Im quantenmechanischen Fall handelt es sich bei p und x um Operatoren.

- (a) Berechnen Sie im klassischen Fall das kanonische Zustandsintegral

$$Z = A \int dx dp e^{-\beta H}, \quad (5)$$

wobei A eine dimensionsbehaftete Konstante ist, die sie in Aufgabenteil (b) bestimmen werden. Berechnen Sie nun auch die freie Energie F , die Entropie S , die innere Energie U und die spezifische Wärme c_V als Funktion der Temperatur $T = 1/(k_B\beta)$.

- (b) Wiederholen Sie die in Teil (a) durchgeführten Berechnungen nun für den quantenmechanischen Fall. Verwenden Sie dabei, dass der Hamiltonian geschrieben werden kann als

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (6)$$

Gehen Sie dabei von der kanonische Zustandssumme

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta H} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} \quad (7)$$

aus. Diskutieren Sie den Grenzfall hoher Temperaturen der freien Energie F und bestimmen Sie durch Vergleich mit dem Ergebnis aus Teil (a) auf diese Weise die Konstante A aus Aufgabenteil (a). Diskutieren Sie auch den Grenzfall hoher Temperaturen der inneren Energie U und der spezifischen Wärme c_V und vergleichen Sie wiederum mit den Ergebnissen von Teil (a).