

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 14

Prof. Dr. Jörg Schmalian

Blatt 3

Dr. Una Karahasanovic, Dr. Peter Orth

Besprechung 09.05.2014

- 1. Ideales Gas mit f Freiheitsgraden:** (10+10+5=25 Punkte, mündlich)
 Für ein ideales Gas aus N Teilchen (Molekülen) mit f Freiheitsgraden pro Molekül lauten die Zustandsgleichungen

$$U = \frac{f}{2} NkT, \quad pV = NkT.$$

- (a) Betrachten Sie eine *adiabatische* Zustandsänderung bei konstanter Teilchenzahl, und zeigen Sie über den 1. Hauptsatz, dass gilt:

$$pV^{(f+2)/f} = \text{const.}, \quad VT^{f/2} = \text{const.}$$

- (b) Berechnen Sie die Entropie

$$S(U, V, N) = S_0 \frac{N}{N_0} + Nk \left[\frac{f}{2} \ln \left(\frac{U}{U_0} \right) + \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) - \frac{f+2}{2} \ln \left(\frac{N}{N_0} \right) \right]$$

wobei S_0, U_0, V_0, N_0 Integrationskonstanten sind.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst:

$$ds = \frac{1}{T} du + \frac{p}{T} dv \quad \text{mit} \quad s = S/N, u = U/N, v = V/N.$$

- (c) Warum verletzt das ideale Gas den 3. Hauptsatz der Thermodynamik?

- 2. Ideales Gas im Schwerfeld der Erde** (12 + 13 = 25 Punkte, mündlich)
 Betrachten Sie ein ideales Gas aus N Teilchen der Masse m im Gravitationsfeld der Erde das durch den Hamiltonian

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + gmz_i \right). \quad (1)$$

beschrieben wird. Nehmen Sie an dass die Erdoberfläche bei $z = 0$ flach sei und für alle Teilchen $z_i > 0$ gelte. Das Gas befinde sich in einem Zylinder beliebiger Höhe und mit Radius R .

- (a) Berechnen Sie die Zustandssumme Z und die freie Energie F des Gases unter der Annahme dass die Temperatur T unabhängig von z ist.
 (b) Bestimmen Sie die Dichte des Gases

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \langle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{\prod_{i=1}^N \int d^3p_i d^3r_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \exp(-\beta H)}{\prod_{i=1}^N \int d^3p_i d^3r_i \exp(-\beta H)} \quad (2)$$

sowie den Druck $p(z)$ als Funktion der Höhe z .

3. Supraleitung

(6 + 6 + 6 + 7 = 25 Punkte, schriftlich)

Viele Metalle werden bei tiefen Temperaturen T und niedrigen Magnetfeldern B supraleitend. Die Wärmekapazitäten dieser beiden Phasen sind in der Abwesenheit eines Magnetfelds ($B = 0$) ungefähr durch

$$\begin{cases} C_s(T) = V\alpha T^3 & \text{in der supraleitenden Phase,} \\ C_n(T) = V[\beta T^3 + \gamma T] & \text{in der normalleitenden Phase,} \end{cases} \quad (3)$$

gegeben, wobei V das Volumen bezeichnet und $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ Konstanten sind. (Es gibt keinen nennenswerten Volumenunterschied bei diesem Phasenübergang, und mechanische Arbeit kann in dieser Aufgabe ignoriert werden.)

- (a) Berechnen Sie die Entropien $S_s(T)$ und $S_n(T)$ in diesen beiden Phasen bei $B = 0$, indem Sie den dritten thermodynamischen Hauptsatz nutzen.
- (b) Experimente zeigen, dass beim Übergang vom normalleitenden in den supraleitenden Zustand bei $B = 0$ keine latente Wärme $\Delta Q = T_c[S_s(T_c) - S_n(T_c)] = 0$ auftritt. Nutzen Sie diese Information, um die Übergangstemperatur als Funktion von α , β und γ zu bestimmen.
- (c) Bei $T = 0$ bilden die Elektronen im Supraleiter Cooper-Paare. Die innere Energie des Supraleiters wird dadurch um $V\Delta_{sc}$ reduziert, wobei Δ_{sc} eine Energie - die supraleitende Energielücke, die man grob als Paarungsenergie eines Cooperpaars verstehen kann - bezeichnet. Es gilt also dass $E_n(T = 0) = E_0$ für den Normalleiter und $E_s(T = 0) = E_0 - V\Delta_{sc}$ für den Supraleiter. Berechnen Sie die innere Energie U beider Phasen für endliche Temperaturen $T > 0$.
- (d) Leiten Sie einen Ausdruck für die Energielücke Δ_{sc} als Funktion von α , β und γ her, indem Sie die Gibbsche freie Energie G (oder das chemische Potential μ) in den beiden verschiedenen Phasen vergleichen.

4. Gaskraft

(25 Punkte, schriftlich)

Ein Zylinder der Höhe h mit Querschnitt A sei mit Heliumgas gefüllt. Die Masse des Gases im Zylinder sei m , die Temperatur T_1 und der Druck p_1 . Der Zylinder befinde sich in einem Raum mit Atmosphärendruck p_0 . Ein gasundurchlässiger Stempel der Masse M mit Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ falle von oben (d.h. aus einer Höhe h) in den Zylinder.

Berechnen Sie die maximale Geschwindigkeit des Stempels unter der Annahme dass er sich ohne Reibung bewegt und es keinen Wärmeaustausch zwischen dem Gas, dem Zylinder und dem Stempel gibt, da der Prozess sehr schnell abläuft.

Hinweis: die Anzahl der Freiheitsgrade eines Heliumatoms beträgt $f = 3$.