

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 14

Prof. Dr. Jörg Schmalian

Blatt 4

Dr. Una Karahasanovic, Dr. Peter Orth

Besprechung 16.05.2014

1. Entropie: mikrokanonisch vs. kanonisch (10+10+5=25 Punkte, mündlich)

- (a) Berechnen Sie für ein klassisches ideales Gas die Anzahl der Zustände $\mathcal{N}(E)$ für gegebene Energie E .
- (b) Berechnen Sie nun die Entropie S des Gases auf zwei Weisen und vergleichen Sie die Ausdrücke. Berechnen Sie zuerst die mikrokanonische Entropie

$$S = k_B \ln \mathcal{N}(E). \quad (1)$$

Berechnen Sie dann die Entropie im kanonischen Ensemble und vergleichen Sie die beiden Ausdrücke im Limes großer Teilchenzahl N . Diskutieren Sie Ihr Ergebnis.

- (c) Bestimmen Sie ausgehend vom in (b) hergeleiteten Ausdruck der Entropie S die Temperatur T und den Druck p eines idealen Gases.

2. Zustandssumme für logarithmisches Spektrum (15 + 10 = 25 Punkte, mündlich)
Betrachten Sie ein quantenmechanisches System aus N nicht-wechselwirkenden Teilchen von denen jedes ein Energiespektrum der Form

$$E_n = \Delta \ln(n) \quad (2)$$

mit $n = 1, 2, \dots, \infty$ besitzt.

- (a) Berechnen Sie die Zustandssumme Z im Fall $k_B T < \Delta$. Bestimmen Sie die führende Temperaturabhängigkeit der Entropie S und der spezifischen Wärme c_V für Temperaturen $k_B T$ nahe bei Δ . Diskutieren Sie Ihr Ergebnis.
- (b) Analysieren Sie was im Fall $k_B T > \Delta$ passiert und diskutieren Sie Ihr Ergebnis. *Hinweis:* betrachten Sie insbesondere die spezifische Wärme im System für $k_B T > \Delta$ und diskutieren Sie die physikalische Konsequenz Ihres Ergebnisses.

3. Maxwell-Relationen (10 + 5 + 10 = 25 Punkte, schriftlich)

- (a) Drücken Sie die spezifische Wärme bei konstantem Volumen

$$c_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{V,N} \quad (3)$$

durch die spezifische Wärme bei konstantem Druck $c_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{P,N}$ und Funktionen der unabhängigen Variablen T und P aus.

Hinweis: verwenden Sie die auf dem ersten Übungsblatt gezeigten Identitäten der Funktionaldeterminanten.

- (b) Was folgt für das Verhältnis von c_V und c_P aus Ihrem Ergebnis in (a) und daraus dass die isothermische Kompressibilität $\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{T,N} > 0$ ist ?
- (c) In dieser Aufgabe wollen wir die Druckänderung berechnen, die notwendig ist, um das Volumen einer Bleiprobe bei einer Erwärmung unverändert zu lassen. Drücken Sie daher die Ableitung

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{V,N} \quad (4)$$

durch den Koeffizienten der thermischen Expansion $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{P,N}$ und der isothermischen Kompressibilität κ_T , die wir bereits in Teil (b) definiert haben, aus.

Man findet experimentell für Blei die Werte $\alpha(\text{Pb}) = 8.4 \times 10^{-5} \text{K}^{-1}$ und $\kappa_T(\text{Pb}) = 2.44 \times 10^{-6} \text{atm}^{-1}$. Hier bezeichnet $1 \text{atm} = 1.01325 \text{bar}$ die Einheit des Atmosphärendrucks.

Welchen Wert erhält man also für $\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{V,N}$? Diskutieren Sie Ihr Ergebnis.

4. Zweiatomiges Gas

(10 + 5 + 5 + 5 = 25 Punkte, schriftlich)

Betrachten Sie ein Gas aus zweiatomigen Molekülen. Nehmen Sie an, dass die beiden Atome unterschiedlich sind wie zum Beispiel im Fall von Kohlenmonoxid CO. Behandeln Sie im folgenden den Translationsfreiheitsgrad der Moleküle klassisch, den Rotationsfreiheitsgrad jedoch quantenmechanisch. Das Rotationsenergiespektrum lautet

$$E_l = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2I} \quad (5)$$

mit der Drehimpulsquantenzahl $l = 0, 1, \dots$. Man kann eine charakteristische Temperatur $\Theta_{\text{rot}} = \hbar^2 / (Ik_B)$ der Rotationen einführen.

- (a) Stellen Sie die Zustandssumme Z für N dieser zweiatomigen Moleküle auf. Behandeln Sie den Translationsfreiheitsgrad dabei klassisch, den Rotationsfreiheitsgrad jedoch quantenmechanisch. Die Summation über die Drehimpulsquantenzahlen müssen Sie in dieser Teilaufgabe nicht ausführen, das werden Sie in der Näherung tiefer und hoher Temperaturen in den folgenden beiden Teilaufgaben tun.
- (b) Betrachten Sie den Fall tiefer Temperaturen $T \ll \Theta_{\text{rot}}$ und berechnen Sie für diesen Fall die Zustandssumme Z , die innere Energie U und die spezifische Wärme c_V . Diskutieren Sie das Ergebnis für c_V .
- (c) Betrachten Sie nun den Fall hoher Temperaturen $T \gg \Theta_{\text{rot}}$ und berechnen Sie für diesen Fall die Zustandssumme Z , die innere Energie U und die spezifische Wärme c_V . Diskutieren Sie das Ergebnis für c_V .
- (d) Was ändert sich im Fall identischer Atome. Diskutieren Sie den Fall von Wasserstoff H_2 , wobei jedes Wasserstoffatom halbzahligen Kernspin $S = 1/2$ besitzt. Das Molekül kann im Spin-Singulett (Gesamtkernspin $S = 0$) Zustand, dem sogenannten Para-Zustand, oder im Spin-Triplett (Gesamtkernspin $S = 1$) Zustand, dem Ortho-Zustand, sein. Stellen Sie die Zustandssumme wie im Teil (a) für die beiden Fälle auf.

In welchem Zustand wird sich H_2 vorzugsweise bei tiefen Temperaturen befinden, wenn man annimmt, dass es keine Energie kostet den Spinzustand zwischen Singulett und Triplett zu ändern? Begründen Sie Ihre Antwort.