

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 14

Prof. Dr. Jörg Schmalian

Blatt 5

Dr. Una Karahasanovic, Dr. Peter Orth

Besprechung 23.05.2014

1. Gibbs'sches Paradoxon

(10+10=20 Punkte, mündlich)

Ein thermisch abgeschlossener Behälter ist durch eine Trennwand in zwei Kammern unterteilt. Beide Kammern enthalten ideale Gase mit der konstanten Wärmekapazität c_V . Die eine Kammer enthält N_1 Teilchen bei der Temperatur T_1 und dem Druck p_1 , die andere N_2 Teilchen bei der Temperatur T_2 und dem Druck p_2 .

- (a) Die Trennwand werde nun verschiebbar gemacht und ihre thermische Isolierung entfernt. Nach dem Druck- und Temperatúrausgleich besitzen beide Kammern den gleichen Druck p und die gleiche Temperatur T . Berechnen Sie diese mit Hilfe der Zustandsgleichungen für das ideale Gas.
- (b) Anschließend wird die Trennwand entfernt. Berechnen Sie die Änderung der Gesamtentropie ΔS aufgrund der Mischung sowohl für den Fall von verschiedenen Gasen als auch für den Fall identischer Gase.

2. Thermodynamik des idealen Fermi-Gases bei $T = 0$ (5+5+5+5+5+5=30 Punkte, mündlich)

Betrachten Sie ein ideales Fermi-Gas bei Temperatur $T = 0$. Da wir Summen über Impulse $\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{L^d}{(2\pi)^d} \int d^d k$ üblicherweise mit Hilfe der Zustandsdichte $\rho(\epsilon)$ als Integrale über die Energie $\int_0^\infty d\epsilon \rho(\epsilon)$ ausdrücken, wiederholen wir auch die Definition der Zustandsdichte $\rho(\epsilon)$.

- (a) Berechnen Sie die Zustandsdichte

$$\rho(\epsilon_0) = \frac{L^d}{(2\pi)^d} \sum_{\sigma} \int d^d k \delta(\epsilon_0 - \epsilon_{\mathbf{k}}) \quad (1)$$

für die Dispersionsrelation $\epsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 |\mathbf{k}|^2 / 2m$ in $d = 1, 2, 3$ Dimensionen. Hier bezeichnet m die Masse und σ den Spin des Teilchens, der zwischen $\sigma = -S, \dots, S$ mit $2S \in \mathbb{N}$ läuft. Sie können im Folgenden $S = 1/2$ setzen.

Im Folgenden wollen wir uns auf den Fall $d = 3$ beschränken. Berechnen Sie die folgenden Größen als Funktion des Fermi-Impulses p_F :

- b) die Gesamtteilchenzahl N ,
- c) die innere Energie U .
- d) das großkanonische Potential $\Omega(T, V, \mu)$. Betrachten Sie Ω auch im Limes $T \rightarrow 0$.
Hinweis: Verwenden Sie die Zustandsdichte $\rho(\epsilon)$ und zeigen Sie mit Hilfe der partiellen Integration, dass

$$\Omega = -V \int_0^\infty d\epsilon a(\epsilon) f(\epsilon - \mu, T), \quad a(\epsilon) = \int_0^\epsilon d\epsilon' \rho(\epsilon').$$

Den Grenzwert von Ω im Limes $T \rightarrow 0$ sollten Sie nach der partiellen Integration berechnen. Hier bezeichnet $f(\epsilon - \mu, T) = 1/(1 + \exp[\beta(\epsilon - \mu)])$ die Fermiverteilungsfunktion mit $\beta = 1/k_B T$.

- e) Verwenden Sie die erhaltenen Werte von Ω , U und N und überprüfen Sie, dass gilt

$$\Omega = U - TS - \mu N.$$

- f) Berechnen Sie schliesslich den Druck des idealen Fermi-Gases bei $T = 0$.

3. Thermodynamik des idealen Fermigases bei tiefen Temperaturen (10+10+5 = 25 Punkte, schriftlich)

Betrachten Sie ein dreidimensionales freies Elektronengas bei tiefen Temperaturen $k_B T \ll \epsilon_F$, wobei $\epsilon_F = p_F^2/2m$ die Fermienergie des Gases bezeichnet. Die Teilchenzahl ist gegeben durch

$$N = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} n_{\mathbf{k}, \sigma} = \int_0^\infty d\epsilon \rho(\epsilon) f(\epsilon - \mu, T) \quad (2)$$

und die innere Energie durch

$$E = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \epsilon_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}, \sigma} = \int_0^\infty d\epsilon \epsilon \rho(\epsilon) f(\epsilon - \mu, T), \quad (3)$$

wobei $n_{\mathbf{k}, \sigma}$ die Besetzungszahlen der Einteilchenzustände, die durch Impuls $\mathbf{k}$ und Spin σ charakterisiert sind, bezeichnen.

- (a) Bestimmen Sie das Tieftemperaturverhalten des chemischen Potentials $\mu(T)$ in niedrigster nichtverschwindender Ordnung in der Temperatur $k_B T \ll \epsilon_F$. Verwenden Sie, dass $\mu(T)$ definiert ist über die Normierung der Gesamtteilchenzahl

$$N = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} n_{\mathbf{k}, \sigma}. \quad (4)$$

Zur Auswertung der Integrale benutzen Sie die sogenannte Sommerfeldentwicklung

$$\begin{aligned} G(\mu) &= \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon) f_T(\epsilon - \mu) = \int_0^\mu d\epsilon g(\epsilon) + \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon) [f_T(\epsilon - \mu) - f_0(\epsilon - \mu)] \\ &\approx \int_0^\mu d\epsilon g(\epsilon) + \int_{-\infty}^\infty d\epsilon [g(\mu) + (\epsilon - \mu)g'(\mu) + \dots] [f_T(\epsilon - \mu) - f_0(\epsilon - \mu)] \\ &= \int_0^\mu d\epsilon g(\epsilon) + 2g'(\mu) \int_0^\infty dx x f_T(x) \end{aligned} \quad (5)$$

mit $x = \epsilon - \mu$. Im 3. Schritt haben wir eine Taylorentwicklung der Funktion $g(\epsilon)$ um $\epsilon = \mu$ durchgeführt und die untere Integralgrenze von $\epsilon = 0$ nach $\epsilon \rightarrow -\infty$ verschoben, da die Funktion $f_T(\epsilon - \mu) - f_0(\epsilon - \mu)$ für $k_B T \ll \epsilon_F$ ihren Hauptbeitrag bei $\epsilon \approx \mu$ besitzt. Man findet für das Integral $\int_0^\infty dx x f_T(x) = \frac{\pi^2}{12} (k_B T)^2$ und daher

$$G(\mu) = \int_0^\mu d\epsilon g(\epsilon) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 g'(\mu) + \mathcal{O}(T^4). \quad (6)$$

- (b) Bestimmen Sie die Energie $E(T)$ in niedrigster nichtverschwindender Ordnung in der Temperatur T .

- (c) Bestimmen Sie die spezifische Wärmekapazität c_V in niedrigster nichtverschwindender Ordnung in der Temperatur T .

4. Thermodynamik des idealen Fermigas bei hohen Temperaturen (10 + 10 + 5 = 25 Punkte, schriftlich)

In dieser Aufgabe zeigen Sie, dass die Fermi-Verteilung $f(\epsilon - \mu, T)$ im Limes hoher Temperaturen in die Boltzmann-Verteilung $f_{cl}(\epsilon - \mu, T) = \exp[-\beta(\epsilon - \mu)]$ übergeht.

- (a) Zum Aufwärmen berechnen Sie zuerst die funktionale Form des chemischen Potentials als Funktion der Temperatur und für feste Teilchenzahl $\mu(T)$ für eine klassische Verteilungsfunktion in $d = 3$ Dimensionen

$$n_{\mathbf{k},\sigma} = f_{cl}(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu). \quad (7)$$

- (b) Zeigen Sie nun, dass die Fermiverteilung $f(\epsilon - \mu, T)$ im Limes hoher Temperaturen in die Boltzmannverteilung $f_{cl}(\epsilon - \mu, T)$ übergeht.

Starten Sie dazu wiederum von der Normierungsbedingung $N = \sum_{\mathbf{k},\sigma} n_{\mathbf{k},\sigma}$, wobei Sie nun die Fermi-Verteilung der Besetzungszahlen

$$n_{\mathbf{k},\sigma} = f(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu, T) \quad (8)$$

verwenden. Man kann das Integral in der Normierungsbedingung $N = \sum_{\mathbf{k},\sigma} n_{\mathbf{k},\sigma}$ exakt lösen und aus einer numerischen Lösung der entstehenden Gleichung bestimmen, daß die Fugazität $z = e^{\beta\mu}$ im Limes hoher Temperaturen ein kleiner Parameter ist. Verwenden Sie im Folgenden diese Information, die Sie *nicht* beweisen müssen. Gehen Sie daher wie folgt vor: entwickeln Sie zuerst die Fermi-Funktion $f_T(\epsilon - \mu)$ in eine geometrische Reihe in der Variablen $z = e^{\beta\mu}$. Betrachten Sie dann lediglich den führenden Term in z . Führen Sie das Integral über die Energie ϵ durch und lösen Sie die Gleichung für $\mu(T)$.

Zeigen Sie nun, dass Ihre Annahme $z < 1$ für hohe Temperaturen gerechtfertigt war, d.h. zeigen Sie die Selbstkonsistenz der Lösung. Zeigen Sie schliesslich dass die Fermiverteilung für hohe Temperaturen in die Boltzmannverteilung übergeht.

- (c) Sie haben in den vorausgehenden Aufgaben $\mu(T)$ für tiefe Temperaturen $k_B T \ll \epsilon_F$ und hohe Temperaturen $k_B T \gg \epsilon_F$ berechnet. Skizzieren Sie nun $\mu(T)$ über den gesamten Temperaturbereich und diskutieren Sie die physikalische Bedeutung des Vorzeichenwechsels in $\mu(T)$.