

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 14

Prof. Dr. Jörg Schmalian

Blatt 7

Dr. Una Karahasanovic, Dr. Peter Orth

Besprechung 06.06.2014

1. Ideales Bosegas

(15+15=30 Punkte, mündlich)

- (a) Betrachten Sie ein ideales Bosegas in d Dimensionen mit chemischem Potential $\mu = 0$ und der Dispersionsrelation

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon_0 \left(\frac{|\mathbf{p}|}{p_0} \right)^a. \quad (1)$$

Hier seien ε_0 und p_0 Konstanten mit den Dimensionen einer Energie (ε_0) beziehungsweise eines Impulses p_0 .

Ein Beispiel für $a = 1$ (lineare Dispersionsrelation) sind Photonen, Phononen oder magnetische Anregungen (Spinwellen, sogenannte Magnonen) in Antiferromagneten. Ein Beispiel für $a = 2$ (quadratische Dispersionsrelation) sind Spinwellen in Ferromagneten. Phononen und Magnonen können experimentell mit Hilfe von Neutronenstreuung gemessen werden, siehe z.B. die Artikel von B. N. Brockhouse, Phys. Rev. Lett. **2**, 256 (1959) und R. N. Sinclair und B. N. Brockhouse, Physical Review, **120**, 5 (1960). Der Nobelpreis 1994 wurde zu 50 % an B. N. Brockhouse für die Entwicklung von Neutronenspektroskopie vergeben.

Bestimmen Sie das führende Tieftemperaturverhalten der spezifischen Wärme c_V für allgemeine Dimensionen d und Dispersionsparameter a .

- (b) Betrachten Sie nun ein ideales Bosegas in d Dimensionen mit der Dispersionsrelation

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \Delta + \frac{D}{2p_0^2} (\mathbf{p}^2 - p_0^2)^2, \quad (2)$$

wobei Δ , D und p_0 Konstanten seien. Bestimmen Sie spezifische Wärme c_V sowohl für $k_B T \ll \Delta$ als auch für $\Delta \ll k_B T \ll D p_0^2$. Wie hängt Ihr Resultat von der Dimension d ab?

2. Relativistisches, entartetes Fermigas

(5+5+10=20 Punkte, mündlich)

Komprimiert man ein Gas von Fermionen, so nimmt die mittlere Energie der Elektronen zu, d.h. die Fermienergie E_F wächst an. Wenn E_F mit mc^2 vergleichbar wird, wobei m die Masse der Teilchen und c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet, so werden relativistische Effekte wesentlich. Wir betrachten hier ausführlich das vollständig entartete ultrarelativistische Elektronengas. Die Energie der Teilchen soll im Folgenden als groß im Vergleich zu mc^2 angenommen werden. Bekanntlich hängt in diesem Fall die Energie eines Teilchens mit seinem Impuls durch die Beziehung

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = c|\mathbf{p}|$$

zusammen. Interessanterweise findet man solch eine lineare Dispersionsrelation auch für Elektronen im zweidimensionalen Kohlenstoffmaterial Graphen (A. Geim und K. Novoselov, Nobelpreis 2010).

Bestimmen Sie bei $T = 0$ die Beziehungen zwischen der Gesamtteilchenzahl N und

- (a) dem Grenzpuls p_F , der Grenzenergie E_F ,
 - (b) der Gesamtenergie des Gases U , dem Gasdruck P .
- Überprüfen Sie ausserdem, dass gilt

$$PV = \frac{1}{3}U.$$

Wenn $T > 0$ ist, dann kann man die thermodynamischen Größen durch Integrale über die Fermi-Funktion ausdrücken. Bestimmen Sie auf diesem Weg

- (d) das großkanonische Potential $\Omega(T)$, die innere Energie $U(T)$. Überprüfen Sie ausserdem, dass gilt

$$\Omega = -\frac{1}{3}U.$$

3. Bose-Einstein Kondensation in drei Dimensionen (2+3+5+5+5+5+5+5=35 Punkte, schriftlich)

In dieser Aufgabe betrachten wir das faszinierende Phänomen der Bose-Einstein Kondensation (BEK) von idealen Bosonen bei tiefen Temperaturen. Für die experimentelle Realisierung der BEK in verdünnten Atomgasen wurde 2001 der Nobelpreis für Physik an E. Cornell, C. Wieman und W. Ketterle vergeben.

Die Dispersionsrelation von freien, idealen Bosonen bei tiefen Temperaturen lautet $\varepsilon(\mathbf{k}) = \hbar^2|\mathbf{k}|^2/2m$, wobei m die Masse der Teilchen bezeichnet und $\hbar\mathbf{k}$ ihren Impuls. Betrachten Sie zuerst das Regime $T \leq T_c$.

- (a) Bestimmen Sie die kritische Temperatur T_c , bei der BEK auftritt, als Funktion der Teilchenzahl N .
- (b) Bestimmen Sie das Verhältnis $N_0(T)/N$ der Bosonen im Grundzustand zur Gesamtteilchenzahl als Funktion der Temperatur.
- (c) Berechnen Sie die spezifische Wärme $c_V(T)$ als Funktion der Temperatur T für $T < T_c$.
- (d) Berechnen Sie $\mu(T, N)$ für $T < T_c$.

Wir wenden uns nun dem Regime $T > T_c$ oberhalb der BEK zu.

- (e) Zeigen Sie zuerst die im Folgenden nützliche Relation

$$\left. \frac{\partial E}{\partial \mu} \right|_{\beta} = \mu \left. \frac{\partial N}{\partial \mu} \right|_{\beta} - \beta \left. \frac{\partial N}{\partial \beta} \right|_{\mu}. \quad (3)$$

- (f) Verwenden Sie den Ausdruck für die Gesamtteilchenzahl $N = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}$ mit der Boseverteilungsfunktion $n_{\mathbf{k}} = 1/\{\exp[\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)] - 1\}$, um $\mu(T)$ für $T > T_c$ in der führenden Ordnung in $(T - T_c)$ zu bestimmen. Sie können annehmen, dass die Bosonen den Spin $S = 0$ besitzen. Benutzen Sie in der Rechnung, dass $\beta\mu$ klein ist. Die Identität $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x-a)}} = \frac{\pi}{\sqrt{-a}}$ mit $a < 0$ könnte nützlich sein.

- (g) Verwenden Sie Ihr Resultat aus Teilaufgabe (e), um zu zeigen, dass die spezifische Wärme c_V sich für Temperaturen $T \gtrsim T_c$ aber nahe bei T_c verhält wie

$$c_V(T) = c_V(T_c) + K(T - T_c)^\gamma. \quad (4)$$

Bestimmen Sie die Konstanten K und γ .

- (h) Skizzieren Sie den Verlauf von $c_V(T)$ für $T < T_c$ und $T > T_c$ anhand Ihrer Ergebnisse aus den Teilaufgaben (c) und (g). Welche Ordnung besitzt der BEK Phasenübergang nach der Ehrenfest'schen Klassifikation der Phasenübergänge ?

4. Reißverschluß

(5+10=15 Punkte, schriftlich)

Ein Reißverschluß, der ein einfaches Modell für die DNA-Doppelhelix darstellt, bestehe aus N Gliederpaaren, von denen jedes einzelne im geschlossenen Zustand die Energie 0 und im offenen Zustand die Energie $\varepsilon > 0$ habe. Der Verschluß soll sich nur von oben her öffnen können, d.h. ein Gliederpaar kann sich erst öffnen, wenn alle oberhalb liegenden Paare bereits offen sind.

- (a) Das System befinde sich im thermischen Gleichgewicht mit der Umgebung bei Temperatur T . Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme.
- (b) Wieviele Glieder stehen im Mittel offen ? Diskutieren Sie das Resultat für große N .