Übungen zur Theoretischen Physik F SS 14

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Dr. Una Karahasanovic, Dr. Peter Orth

Blatt 8
Besprechung 13.06.2014

---

1. Bose-Einstein Kondensation in niedrigen Dimensionen (5+5+5+5=20 Punkte, schriftlich)

In dieser Aufgabe betrachten Sie ein ideales Bosegas in reduzierten Dimensionen, wie sie experimentell in optischen Fallen realisiert werden (Nobelpreis für BEK, 2001).

(a) Bestimmen Sie die Bose-Einstein Kondensationsübergangstemperatur T_c eines freien idealen Bosegases in $d = 2$ Dimensionen.

Nehmen Sie nun an, dass sich das ideale Bosegas in einer harmonischen Falle befindet. Der Hamiltonian für N Teilchen lautet also

$$H = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{|\boldsymbol{p}_j|^2}{2m} + \frac{1}{2} m(\omega_x^2 x_j^2 + \omega_y^2 y_j^2 + \omega_z^2 z_j^2) \right). \tag{1}$$

(b) Bestimmen Sie die kritische Temperatur T_c im Fall einer isotropen dreidimensionalen harmonischen Falle $\omega_x = \omega_y = \omega_z \equiv \omega$. Nehmen Sie an, dass $\hbar\omega \ll k_B T$ um die Summation über die diskreten Oszillatorniveaus in eine Integration zu überführen. Der thermodynamische Limes ist definiert als $N \to \infty$, $\omega \to 0$ mit $N\omega^3 =$ konstant. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis für T_c eines freien Bosegases in $d = 3$ Dimensionen (siehe letztes Übungsblatt).

(c) Nehmen Sie nun an, dass eine der Oszillatorfrequenzen sehr gross ist $\omega_z \gg k_B T \gg \omega_x = \omega_y \equiv \omega$. Das Bosegas ist also effektiv in zwei Dimensionen gefangen. Bestimmen Sie erneut die Übergangstemperatur T_c und vergleichen Sie mit Ihrem Ergebnis in Teilaufgabe (a). Der thermodynamische Limes ist definiert als $N \to \infty$, $\omega \to 0$ mit $N\omega^2 =$ konstant. Geben Sie eine physikalische Erklärung für Ihr Ergebnis an.

(d) Nehmen Sie nun an, dass das Bosegas effektiv in nur einer Dimension gefangen ist, d.h. $\omega_x, \omega_y \gg k_B T \gg \omega_z$. Bestimmen Sie erneut die Übergangstemperatur T_c als Funktion der Teilchenzahl N. Welche Übergangstemperatur findet man im thermodynamischen Limes, der definiert ist als $N \to \infty$, $\omega_z \to 0$ mit $N\omega_z =$ konstant.

Hint: $\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \int_0^\infty dz (\exp{(x+y+z)} - 1)^{-1} = \zeta(3)$, and
$\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy (\exp{(x+y)} - 1)^{-1} = \frac{\pi^2}{6}$.

2. Van-der-Waals-Gas und Maxwellkonstruktion: $(10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 50$ Punkte, mündlich)

Im Unterschied zum idealen Gas wechselwirken in einem realen Gas die Teilchen miteinander. Mit Hilfe eines idealisierten Modells kurzreichweitiger Abstoßung und langreichweitiger Anziehung zwischen den Gasteilchen ergibt sich nach Van der Waals (1873) die modifizierte Zustandsgleichung

$$\left(P + \frac{N^2 a}{V^2}\right)(V - Nb) = N k_B T. \tag{2}$$

(a) Berechnen Sie die innere Energie U eines van-der-Waals Gases. Gehen Sie dabei von der Zustandsgleichung des van-der-Waals Gases aus.

(b) Skizzieren Sie die Isothermen $P = P(V)$ eines durch Gl. (2) definierten Van-der-Waals-Gases. (Die Teilchenzahl sei konstant.) Zeigen Sie, dass man die Helmholtzsche Freie Energie $F(V)$ für konstante Temperatur durch ein Integral über $P(V)$ erhält, und skizzieren Sie $F(V)$ anhand der Skizze für $P(V)$ (schematisch, durch "graphische Integration") in einem weiteren Diagramm. Identifizieren Sie Bereiche, in denen $F(V)$ nicht konvex ist.

(c) In diesen Bereichen bezeichnet Gl. (2) thermodynamisch instabile Zustände, und die wahre Zustandsgleichung muss in diesen Bereichen modifiziert werden. Die Bereiche rechts und links der nicht-konvexen Bereiche werden als zwei verschiedene Phasen des Materials interpretiert, einer Gasphase und einer Flüssigkeitsphase. Um eine physikalisch sinnvolle Freie Energie, die konvex als Funktion von V ist, zu erhalten, ersetzt man den Verlauf der Isothermen im konkaven Bereich durch eine Kurve, die der Koexistenz der beiden Phasen bei den Volumina V_A und V_B entspricht.

Leiten Sie aus der Bedingung mechanischer Stabilität ($P_A = P_B$) für diesen Fall den Verlauf der Isothermen im $F - V$-Diagramm und im $P - V$-Diagramm ab. Zeigen Sie, dass sich die Lage der Endpunkte V_A und V_B des Koexistensbereichs von Gas und Flüssigkeit im $P - V$-Diagramm aus der Bedingung

$$\int_{V_A}^{V_B} P \, dV = P_A(V_B - V_A) \tag{3}$$

ergibt. Gl. (3) entspricht der Maxwellkonstruktion. Bei der Maxwellkonstuktion bestimmt man die Kurve $P = P_A$ und die Endpunkte V_A und V_B im $P - V$-Diagramm so, dass die jeweiligen Flächen zwischen der Van-der-Waals-Isothermen und der wahren Isothermen im Koexistenzbereich oberhalb und unterhalb von $P = P_A$ ein bestimmtes Verhältnis haben. Welches?

(d) Die Maxwell-Konstruktion lässt sich auch ganz allgemein aus den Bedingungen für thermodynamische Stabilität der Koexistenz zweier Phasen A und B ableiten. Wegen des möglichen Austauschs von Teilchen zwischen den beiden Phasen muss $\mu_A = \mu_B$ gelten. Mecahnische Stabilität erfordert $P_A = P_B$. Benutzen Sie diese Bedingungen und die Gibbs-Duhem-Relation, um Gl. (3) herzuleiten.

(e) Bei einer kritischen Temperatur T_c reduziert sich der Koexistenzbereich auf einen Punkt $P_c(V_c)$ im $P - V$-Diagramm. Bestimmen Sie T_c, V_c und P_c als Funktion von a, b und N.

3. Ising-Modell: $(5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 30$ Punkte, mündlich)

Im Ising-Modell können die Spins, die das magnetische Moment der Atome oder Ionen bestimmen, nur zwei diskrete Zustände annehmen können. Vereinfachend kommt dazu, dass nur eine Komponente (s^z) der Spins im Hamiltonoperator auftaucht

$$\hat{\mathcal{H}} = -J \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z - \mu H \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^z,$$

wobei H das externe Magnetfeld ist und $\sigma_i^z = 2s_i^z = \pm 1$.

Für drei Spins ($N = 3$) und $H = 0$ bestimmen Sie

(a) die kanonische Zustandssumme $Z(3)$;

(b) die freie Energie $F(T)$;

(c) die Entropie S und die Wärmekapazität

$$c_H = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_H ;$$

(d) den Mittelwert $\langle \sigma_i^z \rangle$.

Hinweis: Benutzen Sie die Relation

$$e^{\alpha\sigma} = \cosh\alpha + \sigma \sinh\alpha, \quad \sigma = \pm 1.$$

(e) Schreiben Sie jetzt den allgemeinen Ausdruck für die Magnetisierung des Systems von N Spins. Für $N = 3$ bestimmen Sie die Magnetisierung im Limes

$$\mu H \ll k_B T.$$

(f) Finden Sie jetzt die Suszeptibilität

$$\chi = \left. \frac{\partial M}{\partial H} \right|_{H \to 0} .$$