Übungen zur Theoretischen Physik F SS 14

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Dr. Peter Orth, Dr. Una Karahasanovic

Blatt 9
Besprechung 20.06.2014

Auf diesem Übungsblatt sind alle Aufgaben mündlich zu bearbeiten.

1. **Ginzburg-Landau Theorie eines ferromagnetischen Isingphasenübergangs** ($5+5+5+5=20$, mündlich)
Betrachten Sie das Landaufunktional der freien Energiedichte

$$f = \alpha m^2 + \beta m^4 + \gamma m^6 \,, \tag{1}$$

wobei m die lokale Magnetisierung bezeichnet. In dieser Aufgabe nehmen wir an, dass die lokale Magnetisierung m homogen im Raum (d.h. unabhängig von $\boldsymbol{r}$) ist. Man nennt m auch den Ordnungsparameter des magnetischen Phasenübergangs, da man die beiden Phasen des Systems, die paramagnetische mit $m = 0$ und die ferromagnetische mit $m \neq 0$, durch die verschiedenen Werte von m charakterisieren kann.

Nehmen Sie an, dass $\gamma > 0$ konstant sei im Gegensatz zu den Parametern α und β, die sich als Funktion der Temperatur T oder eines anderen physikalischen Parameters wie Druck oder chemischer Zusammensetzung ändern lassen. Insbesondere kann α als Funktion von T auch sein Vorzeichen wechseln.

In dieser Aufgabe betrachten wir das Phasendiagramm des Systems.

(a) Bestimmen Sie die Extrema der freien Energiedichte f als Funktion von α, β und $\gamma > 0$.

(b) Bestimmen Sie die Parameterwerte für die sich das System genau an einem Phasenübergang zweiter Ordnung befindet. An einem Phasenübergang zweiter Ordnung steigt der (Betrag des) Ordnungsparameter m kontinuierlich an.

(c) Bestimmen Sie die Parameterwerte für die im System ein Phasenübergang erster Ordnung stattfindet. An einem Phasenübergang zweiter Ordnung steigt der (Betrag des) Ordnungsparameter m sprunghaft an.

(d) Zeichnen Sie ein schematisches Phasendiagramm des Systems in der α-β-Ebene. Beachten Sie dass stets gilt, dass $\gamma > 0$.

2. **Mikroskopisches Modell für einen ferromagnetischen Phasenübergang** ($10+10=20$ Punkte, mündlich)
Betrachten Sie nun den folgenden Ausdruck für die freie Energie, die man aus einem mikroskopischen Modell für Ferromagnetismus herleiten kann.

$$F = -\frac{1}{\beta} \sum_{\mathbf{k},\sigma} \ln\left[1 + \exp\left(-\beta(\epsilon^\sigma(\mathbf{k}) - \mu)\right)\right] + gM^2 \,. \tag{2}$$

Die Größe M bezeichnet die makroskopische Magnetisierung des Systems. In der paramagnetischen Phase findet man $M = 0$, in der ferromagnetischen Phase $M \neq 0$.

Auerdem bezeichne $\beta = T^{-1}$ die inverse Temperatur, μ das chemische Potential und $\epsilon^\sigma(\mathbf{k}) = k^2/2 + \sigma g M$ die spinabhängige elektronische Dispersionsrelation ($\sigma = \pm 1$). Wir haben der Einfachheit halber $k_B = \hbar = m = 1$ gesetzt. Die Konstante $g > 0$ beschreibt die Stärke der Wechselwirkung zwischen Elektronen, die temperaturunabhängig ist. Experimentell lässt sich g jedoch variieren indem man zum Beispiel den Druck ändert.

(a) Leiten Sie ausgehend von Gl. (2) die Ginzburg-Landau Entwicklung der freien Energie F ab, indem sie in Potenzen von M entwickeln. Bestimmen Sie explizit die Funktionen $\alpha \equiv \alpha(T, g)$, $\beta \equiv \beta(T, g)$ und $\gamma \equiv \gamma(T, g)$ durch Vergleich mit Gl. (1). Beachten Sie dass $F = \int d^d r f$. Drücken Sie die Funktionen α, β, γ durch dreidimensionale Impulsintegrale über Ableitungen der Fermifunktion aus. Diese Integrale müssen sie *nicht* ausführen (dies kann man im Prinzip auf numerische Weise bei endlichen Temperaturen durchführen).

(b) Betrachten Sie nun den Fall verschwindender Temperatur $T = 0$. Da die Größen α, β, γ hängen nun nur noch von g ab, bestimmen Sie diese analytisch. Man kann zeigen, dass $\beta, \gamma > 0$ für alle Werte von g (dies müssen Sie nicht tun). Bestimmen Sie die kritische Wechselwirkungsstärke g^* bei der ein Phasenübergang zwischen ferromagnetischer und paramagnetischer Phase stattfindet.

Bemerkung: dieses Szenario ist ein einfaches Beispiel eines Quantenphasenübergangs, d.h. eines Phasenübergangs bei $T = 0$ der durch die Änderung eines Parameters im Hamiltonian des Systems (und nicht die Änderung der Temperatur) hervorgerufen wird. Das Studium von Quantenphasenübergänge ist ein sehr aktives Feld der modernen Forschung in der Festkörperphysik.

3. Relation zwischen Suszeptibilität und Korrelatoren im Ising-Modell:

($10 + 20 = 30$ Punkte, mündlich)

Im Ising-Modell können die Spins, die das magnetische Moment der Atome oder Ionen bestimmen, nur zwei diskrete Zustände annehmen können. Vereinfachend kommt dazu, dass nur eine Komponente (s^z) der Spins im Hamiltonoperator auftaucht:

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j - \mu B \sum_i S_i, \tag{3}$$

wobei B das externe Magnetfeld ist und $S_i = 2 s_i^z = \pm 1$.

(a) Benutzen Sie den allgemeinen Ausdruck $Z = \mathrm{Sp}\left\{e^{-H/(k_B T)}\right\}$ für die Zustandssumme des durch den Hamiltonoperator (3) beschriebenen Ising-Modells, um die Relation zu beweisen:

$$\chi \equiv \frac{\partial M}{\partial B} = \frac{1}{k_B T} \left[\sum_{i,j} \langle S_i S_j \rangle - \left\langle \sum_i S_i \right\rangle^2 \right] .$$

(b) Bestimmen Sie die Korrelationsfunktion

$$g(n) = \langle S_i S_{i+n} \rangle - \langle S_i \rangle^2 .$$

für das eindimensionale Ising-Modell:

$$H = -J \sum_i^N S_i S_{i+1} - \mu B \sum_i^N S_i, \qquad S_{N+1} = S_1, \tag{4}$$

Hinweis: Finden Sie die Transfermatrix im Magnetfeld. Drücken Sie die Korrelationfunktion durch die Transfermatrizen aus.

4. Landau-Ginzburg Theorie für Phasenübergänge in Flüssigkristallen ($5 + 10 + 5 + 10 = 30$ Punkte, mündlich)

Flüssigkristalle sind Materialien die aus stabförmigen Molekülen bestehen die eine (langreichweitige) Ordnung in der Orientierung zeigen können ohne in einem festen Zustand zu sein. Die freie Energiedichte f lässt sich als Funktion des Ordnungsparameters ψ schreiben als

$$f(\psi) = \frac{1}{2}a(T)\psi^2 - \frac{b}{3}\psi^3 + \frac{c}{4}\psi^4 \,. \tag{5}$$

Hier müssen wir (im Gegensatz zum ferromagnetischen Fall) den kubischen Term in der Entwicklung mitnehmen. Es gilt, dass $a(T) = a_0(T - T_0)$, $b > 0$, $c > 0$ und $\psi = \langle 3\cos^2\theta - 1\rangle$ ist ein Maß für die Ordnung in der Orientierung der Moleküle, die den Winkel θ relativ zu einer bevorzugen Achse einnehmen.

(a) Bestimmen Sie die Ordnung des Phasenübergangs.

(b) Bestimmen Sie die Übergangstemperatur.

(c) Bestimmen Sie den Wert von ψ an der Übergangstemperatur.

(d) Bestimmen Sie die latente Wärme des Übergangs. Wie würde sich Ihr Resultat verändern falls $b = 0$ gelten würde ?