

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 14**Prof. Dr. Jörg Schmalian****Blatt 10****Dr. Peter Orth, Dr. Una Karahasanovic****Besprechung 27.06.2014**

Auf diesem Übungsblatt sind alle Aufgaben mündlich zu bearbeiten.

1. Phasenübergang 2. Ordnung:

(12 + 13 = 25 Punkte, mündlich)

Für ein Heisenberg-Modell für N Spins der Länge S lässt sich über ein Näherungsverfahren das freie Energiefunktional für den Ordnungsparameter $\bar{m}$ herleiten,

$$F(\bar{m}) = N \left[\frac{1}{2} z J (\bar{m})^2 - k_B T \ln(Z_1) \right]$$

wobei sich Z_1 schreiben lässt als

$$Z_1 = \sum_{m=-S}^S \exp \left(\frac{z J \bar{m}}{k_B T} m \right) = \frac{\sinh \left(\frac{z J}{k_B T} \bar{m} \frac{2S+1}{2} \right)}{\sinh \left(\frac{z J}{k_B T} \bar{m} \frac{1}{2} \right)}.$$

z ist die Koordinationszahl des Gitters, J die Wechselwirkungsenergie.

- (a) In der Nähe des Phasenübergangs ist $\bar{m} \simeq 0$. Zeigen Sie durch Reihenentwicklung bis zur Ordnung $\sim \bar{m}^4$, daß man für $T \simeq T_N$ ein Landau-Funktional erhält,

$$F(\bar{m}) = N z J \left[\frac{1}{2} \frac{T - T_N}{T_N} (\bar{m})^2 + \frac{1}{4} b (\bar{m})^4 - \frac{S(S+1)}{3} \ln(2S+1) \right]$$

und bestimmen Sie die Konstanten T_N und b .

- (b) Skizzieren Sie $F(\bar{m})$ für $T > T_N$ und $T < T_N$, und berechnen Sie $\bar{m}(T)$.

2. Phasenübergang 1. Ordnung:

(5 + 10 + 10 = 25 Punkte, mündlich)

In einem ferroelektrischen Kristall entsteht unterhalb einer Übergangstemperatur T_c eine spontane Verzerrung γ der Einheitszelle, verbunden mit einem Dipolmoment $\mathbf{P}$. Das Landau-Funktional für die beiden Ordnungsparameter $\eta = |\mathbf{P}|^2$ und γ lautet

$$F(\eta, \gamma) = a(T - T_0)\eta + b\eta^2 + c\eta^3 + d\gamma\eta + \frac{g}{2}\gamma^2$$

wobei $T_0, a, b, c, d, g > 0$, $\tilde{b} = \left(\frac{d^2}{2g} - b \right) > 0$.

- (a) Bestimmen Sie den Gleichgewichtswert $\gamma = \gamma(\eta)$ und damit das Funktional $F(\eta)$. Skizzieren Sie den Verlauf von $F(\eta)$ für verschiedene Temperaturen T , und begründen Sie, daß ein Phasenübergang 1. Ordnung auftreten kann.

- (b) Berechnen Sie die kritische Temperatur T_c , bei der dieser Übergang stattfindet. Bestimmen Sie näherungsweise $\eta(T)$ und $\gamma(T)$ in der Nähe von T_c .
- (c) Berechnen Sie die Entropie

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{T_0, a, b, \dots}$$

für T unmittelbar oberhalb bzw. unterhalb T_c . Bestimmen Sie die latente Wärme $Q_l = T \Delta S$ des Phasenübergangs.

3. Molekularfeld-Näherung für das Ising-Modell: (25 Punkte, mündlich)

In der Vorlesung haben Sie die Molekularfeld-Näherung für das Ising-Modell kennengelernt:

$$H = - \sum_i (zJ\langle S \rangle + \mu B) S_i - \frac{z}{2} N \langle S \rangle^2$$

wobei z die Zahl der nächsten Nachbarn ist.

Bestimmen Sie die Wärmekapazität bei festem Feld C_B in der Nähe des Phasenübergangs. Was ist der Wert des entsprechenden kritischen Exponenten?

4. Magnetischer Phasenübergang (25 Punkte, mündlich)

Betrachten Sie ein System von N Ionen mit Spin $1/2$. Nehmen Sie an, dass bei $T = 0$ das System ferromagnetisch und bei höheren endlichen Temperaturen ($T > T_0$) das System paramagnetisch ist.

Betrachten Sie eine sehr vereinfachte Theorie des Phasenübergangs zwischen den beiden Phasen. Laut dieser Theorie ist die Wärmekapazität als Funktion der Temperatur

$$C = \begin{cases} C_{max} \left(\frac{2T}{T_0} - 1 \right), & \frac{T_0}{2} < T < T_0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Finden Sie C_{max} als Funktion von N .