

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 14

Prof. Dr. Jörg Schmalian

Blatt 13

Dr. Peter Orth, Dr. Una Karahasanovic

Besprechung 18.07.2014

1. Kinetische Gleichung

(50 Punkte, schriftlich)

Die kinetische Gleichung für eine Verteilungsfunktion $f(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t)$ von Elektronen lautet $df/dt = I(f)$, wobei $I(f)$ das Stoßintegral darstellt. Verwendet man die Relaxationszeitapproximation für $I(f)$, so erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{f - f_0}{\tau}.$$

Das Symbol f_0 bezeichnet die Verteilungsfunktion im Gleichgewicht die ausschliesslich von der Energie ϵ abhängt und τ ist die Relaxationszeit, die die typische Equilibrationszeitskala bezeichnet.

- Leiten Sie die kinetische Gleichung für den Fall her dass ein kleines, konstantes und räumlich homogenes elektrisches Feld $\mathbf{E}$ angelegt ist. Verwenden Sie, dass die Arbeit W , die das angelegte Feld verrichtet gleich der Energie, die die Elektronen hinzugewinnen ist $W = \frac{\partial \epsilon}{\partial t}$ and die Geschwindigkeit der Elektronen durch $\mathbf{v} = \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{p}}$ gegeben ist.
- Nehmen Sie nun an, dass das angelegte elektrische Feld schwach ist und es genügt Terme bis zur linearen Ordnung in $|\mathbf{E}|$ mitzunehmen. Sie können daher die Verteilungsfunktion als $f = f_0 + f_1$ schreiben wobei f_0 die Fermi-Dirac Verteilung ist, f_1 linear in $|\mathbf{E}|$ ist und $|f_1| \ll f_0$.
- Bestimmen Sie den elektrischen Strom $\mathbf{j}$ sowie die elektrische Leitfähigkeit σ aus der Relation $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ wobei

$$\mathbf{j} = 2e \int \mathbf{v} f d^3p = 2e \int \mathbf{v} f \nu(\epsilon) d\epsilon \frac{d\Omega}{4\pi}.$$

Hier bezeichnet $\nu(\epsilon)$ die Zustandsdichte und $\int d\Omega$ die Integration über den vollen Raumwinkel in drei Dimensionen.

Verwenden Sie, dass f_0 nur von der Energie ϵ abhängt, dass $\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \approx -\delta(\epsilon)$ und dass $\int \frac{d\Omega}{4\pi} \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) = \mathbf{E}/3$ wobei $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$.

2. Stationäre Lösung der Liouville-Gleichung

(25 Punkte, mündlich)

Betrachten Sie die klassische Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, wobei $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_{3N})$ und $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{3N})$ einen Vektor im Phasenraum $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ definieren. Zeigen Sie nun mit Hilfe der klassischen Liouville-Gleichung, dass eine Gibbs-Verteilung ρ , die nur über die Energie von $\mathbf{x}$ abhängt, stationär ist,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(H(\mathbf{x})) = 0.$$

Die klassische Liouville Gleichung (vergleiche QM: von Neumann Gleichung) lautet

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\{\rho, H\}.$$

Hierbei bezeichnet $\{\cdot, \cdot\}$ die klassische Poisson-Gleichung und nicht etwa den Antikommutator. Die Poissonklammer ist folgendermaßen definiert:

$$\{A, B\} = \sum_{j=1}^{3N} \left(\frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial B}{\partial q_j} - \frac{\partial A}{\partial q_j} \frac{\partial B}{\partial p_j} \right).$$

3. Gibbs-von Neumann Entropie

(25 Punkte, mündlich)

Betrachten Sie eine quantenmechanische Dichtematrix $\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ mit $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_{3N})$ und $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{3N})$. Berechnen Sie die Zeitentwicklung der Gibbs-von Neumann Entropie

$$S_G = -k_B \text{Tr}(\rho \ln \rho)$$

für ein isoliertes System, das durch den (eventuell zeitabhängigen) Hamiltonoperator H beschrieben werde. Die Zeitentwicklung der Dichtematrix ist durch die von-Neumann Gleichung gegeben

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = \frac{i}{\hbar} [\rho, H].$$

Interpretieren Sie Ihr Resultat. Hier kann es von Vorteil sein sich eine konkrete (experimentell relevante) Situation vorzustellen bei der sich das System für Zeiten $t < 0$ in einem Gleichgewichtszustand bezüglich eines Hamiltonoperators H_0 befindet und sich der Hamiltonoperator zum Zeitpunkt $t = 0$ drastisch zu H ändert.