

Moderne Theoretische Physik III SS 2015

Prof. Dr. A. Mirlin

Blatt 01, 100 Punkte

Dr. U. Karahasanovic, Dr. I. Protopopov

Besprechung 24.04.2014

Die Abgabe ist jeweils bis spätestens Freitag, 09:00 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten im Eingangsbereich des Physik-Hochhauses zu tätigen.

1. Mathematische Grundlagen

(5 + 5 + 10 + 10 = 30 Punkte, mündlich)

Stirlingsformel.

(a) Beweisen Sie die Stirlingsche Näherungsformel

$$\ln n! \approx n \ln n - n, \quad n \gg 1. \quad (1)$$

Benutzen Sie hierzu die Definition von $n!$ über die Gammafunktion

$$\Gamma(n+1) = n! = \int_0^\infty dx \, x^n e^{-x} \quad (2)$$

und berechnen Sie das Integral näherungsweise mit der Sattelpunktmethode. Zeigen Sie hierzu, dass der Logarithmus des Integranden ein Maximum bei $x = n$ besitzt und entwickeln Sie bis zur quadratischen Ordnung in der Variablen $x - n$. Dies liefert ein leicht auszurechnendes Gaußsches Integral.

Funktionaldeterminantenkalkül.

Gegeben seien die Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ mit unabhängigen Variablen x und y . Als Funktionaldeterminante (Jacobi-Determinante) bezeichnet man

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_y & \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_x \\ \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_y & \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_x \end{pmatrix}.$$

(b) Zeigen Sie, dass folgende Relationen gelten

$$\frac{\partial(u, y)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_y \quad (3)$$

$$\frac{\partial(x, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_x$$

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = -\frac{\partial(v, u)}{\partial(x, y)} = -\frac{\partial(u, v)}{\partial(y, x)} \quad (4)$$

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \frac{\partial(s, t)}{\partial(x, y)} = \frac{\frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)}}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}}. \quad (5)$$

Hinweis: Zur Lösung dieser und der folgenden Aufgaben ist es hilfreich, die Kettenregel für Jacobi-Matrizen zu verwenden.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}|_y & \frac{\partial u}{\partial y}|_x \\ \frac{\partial v}{\partial x}|_y & \frac{\partial v}{\partial y}|_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s}|_t & \frac{\partial u}{\partial t}|_s \\ \frac{\partial v}{\partial s}|_t & \frac{\partial v}{\partial t}|_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial x}|_y & \frac{\partial s}{\partial y}|_x \\ \frac{\partial t}{\partial x}|_y & \frac{\partial t}{\partial y}|_x \end{pmatrix}. \quad (6)$$

- (c) Betrachten Sie nun die 3 Variablen x , y und z , die durch die Bedingung $F(x, y, z) = 0$ miteinander in Zusammenhang stehen. Durch Auflösen der Gleichung $F = 0$ nach x , y oder z erhalten wir 3 Funktionen $x(y, z)$, $y(x, z)$ und $z(x, y)$. Zeigen Sie, dass die Ableitungen der Funktionen folgende Relationen erfüllen

$$\frac{\partial x}{\partial y}|_z = \left(\frac{\partial y}{\partial x}|_z \right)^{-1}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}|_z \frac{\partial z}{\partial y}|_x \frac{\partial x}{\partial z}|_y = -1. \quad (8)$$

- (d) Nehmen Sie weiter an, dass es einen funktionalen Zusammenhang $w = w(x, y)$ gibt. Zeigen Sie

$$\frac{\partial x}{\partial w}|_z = \frac{\partial x}{\partial y}|_z \frac{\partial y}{\partial w}|_z, \quad (9)$$

$$\frac{\partial x}{\partial y}|_z = \frac{\partial x}{\partial y}|_w + \frac{\partial x}{\partial w}|_y \frac{\partial w}{\partial y}|_z. \quad (10)$$

2. Ideales Boltzmann-Gas (10 + 10 + 5 + 10 = 35 Punkte, mündlich)

Die innere Energie eines idealen einatomigen Boltzmann-Gases beträgt $U = 3Nk_B T/2$, wobei die Zustandsgleichung $pV = Nk_B T$ lautet. Hierbei bezeichnet N die Zahl der Atome, T die Temperatur, p den Druck und V das Volumen des Systems.

- (a) Berechnen Sie die Entropie des Systems $S(T, V)$ als Funktion der Temperatur und des Volumens indem Sie von der inneren Energie ausgehen. Bestimmen Sie die freie Energie $F(T, V)$.

Hinweis: Die freie Energie ist durch $F = U - TS$ definiert.

- (b) Analysieren Sie den Carnot-Prozess für ein ideales Boltzmann-Gas. Der Carnot-Prozess setzt sich zusammen aus einer isothermen Expansion von einem Volumen V_1 zu einem Volumen V_2 bei der Temperatur T_1 , einer adiabatischen Expansion zu einer Temperatur $T_2 < T_1$, einer isothermen Kompression bei der Temperatur T_2 und einer adiabatischen Kompression zum Ausgangspunkt (T_1, V_1) . Berechnen Sie die Arbeit, die vom System in jedem Schritt geleistet wird und die Wärme, die vom Gas während der isothermen Expansion (Kompression) aufgenommen (abgegeben) wird. Berechnen Sie den Wirkungsgrad (vom System geleistete Arbeit/zugeführte Wärme) der Carnot-Maschine als Funktion von T_1 und T_2 .

- (c) Berechnen Sie das Integral

$$\Delta S = \oint \frac{\delta Q}{T}, \quad (11)$$

über den Carnot-Prozess für das ideale Boltzmann-Gas. Dabei bezeichnet δQ die infinitesimale Menge an Wärme die vom System aufgenommen wird und das Integral läuft über den kompletten Carnot-Prozess. Interpretieren Sie das Ergebnis.

- (d) Untersuchen Sie den selben Carnot-Prozess in der umgekehrten Richtung (die isotherme Kompression des Gases findet bei der höheren Temperatur T_1 statt). Was ist der Zweck dieses Prozesses? Berechnen Sie die Wärme, die im Prozess aus dem kalten Wärmebad entnommen wird und vergleichen Sie sie mit der Arbeit, die von einer externen Maschine geleistet wird um den Prozess zu durchlaufen.

3. Ultrarelativistisches Bosegas (15 + 15 + 5 = 35 Punkte, schriftlich)

Die innere Energie U eines ultrarelativistischen Gases von Bosonen, wie zum Beispiel Photonen, erfüllt $U = \sigma VT^4$, wobei σ die Stefan-Boltzmann Konstante und T die Temperatur bezeichnet. Der Druck eines solchen Systems erfüllt $p = U/3V$ wobei V das Volumen des Systems bezeichnet. Das chemische Potential des ultrarelativistischen Bosegases verschwindet $\mu = 0$. Diese Relationen folgen experimentellen Beobachtungen, später werden wir sie auch durch eine mikroskopische Theorie fundieren.

- (a) Bestimmen Sie die Entropie des Systems $S(T, V)$ als Funktion von Temperatur und Volumen indem Sie von der inneren Energie U ausgehen. Berechnen Sie die freie Energie $F(T, V)$. Geben Sie die Abhängigkeit des Drucks vom Volumen in einem adiabatischen Prozess an.

Hinweis: Die freie Energie ist durch $F = U - TS$ definiert.

- (b) Analysieren Sie einen geschlossenen Carnotzyklus für das ultrarelativistische Bosegas. Berechnen Sie Arbeit, die vom System in jedem Schritt geleistet wird und die Wärme, die vom System während der isothermen Expansion (Kompression) aufgenommen (abgegeben) wird. Bestimmen Sie den Wirkungsgrad (vom System geleistete Arbeit/zugeführte Wärme) der Carnot-Maschine als Funktion von T_1 und T_2 .

- (c) Berechnen Sie das Integral

$$\Delta S = \oint \frac{\delta Q}{T}, \quad (12)$$

über den Carnot-Prozess für das ultrarelativistische Bose-Gas. Dabei bezeichnet δQ die infinitesimale Menge an Wärme die vom System aufgenommen wird und das Integral läuft über den kompletten Carnot-Prozess. Interpretieren Sie das Ergebnis.