**Moderne Theoretische Physik III SS 2015**

**Prof. Dr. A. Mirlin**
**Dr. U. Karahasanovic, Dr. I. Protopopov**

**Blatt 03, 100 Punkte**
**Besprechung 15.05.2014**

**Die Abgabe ist jeweils bis spätestens Freitag, 09:30 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten im Eingangsbereich des Physik-Hochhauses zu tätigen.**

## 1. Mikrokanonisches Ensemble für das ideale Boltzmann Gas.

($15 + 15 + 5 + 5 = 40$ Punkte, mündlich)

Gegeben sind $N$ nicht-wechselwirkende klassische Teilchen in einem Volumen $V$ im $D$-dimensionalen Raum. Wir nehmen an, dass die Teilchen keine internen Freiheitsgrade haben (einatomiges Gas). Das Ziel dieser Aufgabe ist die Untersuchung dieses idealen Gases mithilfe des mikrokanonischen Ensembles.

(a) Das System hat einen $2D \times N$-dimensionalen Phasenraum ($D \times N$ Teilchenkoordinaten und $D \times N$ Impulse). Entsprechend dem fundamentalen Postulat der klassischen Statistischen Mechanik im Gleichgewicht kann das System in jedem Punkt der $(2D \times N - 1)$-dimensionalen Hyperfläche konstanter Energie $E = \sum_{i=1}^{N} p_i^2/2m = const$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit gefunden werden. Finde einen expliziten Ausdruck für die normierte Gleichgewichtsverteilung $\rho$ des Systems im Phasenraum. *Hinweis:* Die Gasteilchen sind ununterscheidbar.

(b) In der statistischen Physik ist die Entropie durch die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\rho$ entsprechend

$$S = -k_B \langle \ln \rho \rangle \tag{1}$$

definiert. Finde die Entropie $S(E, V, N)$ des idealen Boltzmanngases als Funktion der Energie $E$, der Teilchenzahl $N$ und des Volumens $V$ des Systems. Betrachte den makroskopischen Grenzwert $N \gg 1$.

*Hinweis:* Bei der Betrachtung des makroskopischen Limits wird eventuell der asymptotische Ausdruck der Eulerschen Gamma-Funktion benötigt

$$\ln \Gamma(n) \approx n \ln n - n, \qquad n \gg 1, \tag{2}$$

die auf Blatt 1 hergeleitet wurde.

(c) Leite Ausdrücke für die Temperatur $T$, den Druck $p$ und das chemische Potential $\mu$ des Boltzmanngases als Funktion von $E$, $V$ und $N$ her und benutze dabei die thermodynamischen Grundgleichungen und die Entropie $S(E, V, N)$, die in Aufgabe 1 b) hergeleitet wurde. Drücke danach $p$ und $\mu$ als Funktionen von $T$, $V$ und $N$ aus.

(d) Finde die Entropie des Systems als Funktion von $T$, $V$ und $N$. Vergleiche die Ergebnisse mit den Resultaten aus Aufgabe 2 von Blatt 1 (die Raumdimension $D$ war in dieser Aufgabe 3). Diskutiere die Anwendbarkeit des dritten Hauptsatzes der Thermodynamik auf das Boltzmanngas.

## 2. Gas in Bewegung und Verallgemeinerung des mikrokanonischen Ensembles.

($10 + 20 + 10 = 40$ Punkte, schriftlich)

Das mikrokanonische Ensemble beruht auf der Annahme, dass die einzige Erhaltungsgröße eines komplexen Vielteilchensystem die Gesamtenergie ist. Während dies im Allgemeinen richtig ist, gibt es Ausnahmesituationen, in denen die mikroskopische Dynamik des System auf der Oberfläche konstanter Energie weiter durch zusätzliche Erhaltungsgrößen eingeschränkt wird. Deshalb kann das in der vorherigen Übung beschriebene mikrokanonische Ensemble nicht auf die Gleichgewichtszustände solcher Systeme angewendet werden.

Das Ziel dieser Übung ist es, ein einfaches Beispiel zu diskutieren, in dem die Verallgemeinerung der mikrokanonischen Gesamtheit benötigt wird. Wir betrachten ein System von klassischen Teilchen (zur Vereinfachung in einer räumlichen Dimension). In der üblichen Betrachtung des mikrokanonischen Ensembles nimmt man an, dass sich das System in einem Kasten befindet. Dadurch ist die Translationsinvarianz aufgehoben und es gilt keine Impulserhaltung. Wir heben nun diese Annahme auf und betrachten ein System, in dem der Gesamtimpuls $Q = \sum_i p_i$ erhalten bleibt.

(a) Betrachte die Liouville-Gleichung für die Verteilung $\rho(\vec{x}, t)$ im Phasenraum ($\vec{x}$ steht hier für einen vollen Satz von Koordinaten und Impulsen im Phasenraum). Zeige, dass jede Funktion im Phasenraum, die die Form $\rho(\vec{x}) = \rho(H(\vec{x}), Q(\vec{x}))$ hat, eine stationäre Lösung der Liouville-Gleichung ist.

(b) Wir verallgemeinern nun das fundamentale Postulat der klassischen Statistischen Mechanik indem wir postulieren, dass die Gleichgewichtsverteilung eine uniforme Verteilung über die Hyperfläche im Phasenraum ist, die durch konstante Energie $E$ und konstanten Impuls $Q$ beschrieben wird. Betrachte ein ideales Boltzmanngas mit erhaltenem Gesamtimpuls. Benutze die Methode der Übungen 1a und 1b und berechne die Entropie des Systems $S(E, V, N, Q)$ im thermodynamischen Limit $N \gg 1$. Vergleiche die Ergebnisse mit denen aus Aufgabe 1 b). Was ist die physikalische Bedeutung der Ableitung $(\partial S/\partial Q)_{E,N,V}$?
*Hinweis 1:* Ein System mit endlichem Volumen bei gleichzeitig erhaltener Translationsinvarianz kann durch Teilchen auf einem Kreis mit Umfang $L = V$ sein (wir betrachten ein 1D System).
*Hinweis 2:* Zur Berechnung der Normierung der Wahrscheinlichkeitsverteilung (die Hyperfläche mit $E = const$, $Q = const$) ist es sinnvoll, eine Galilei-Transformation zum Massenschwerpunkt des Bezugssystems zu machen.

(c) Wir betrachten nun ein generisches System von wechselwirkenden klassischen Teilchen. Was ist die Beziehung der Entropien $S(E, V, N)$ und $S(E, V, Q, N)$, die mit dem mikrokanonischen Ensemble und mit dessen impulserhaltenden Verallgemeinerung berechnet wurden?

## 3. Großkanonisches Ensemble und verallgemeinertes Gibbs Ensemble

(10 + 10 = 20 Punkte, mündlich)

(a) Wir betrachten ein kleines aber makroskopisches System $A$, das in Verbindung zu einem großen Reservoir $R$ steht. Das System und das Reservoir können sowohl Energie als auch Teilchen austauschen. Das Gesamtsystem $A + R$ ist abgeschlossen und kann durch das mikrokanonische Ensemble beschrieben werden. Zeige, dass die Wahrscheinlichkeit, das System $A$ in Zustand $n$ mit $N_n$ Teilchen und Energie $E_n$ zu finden durch das grokanonische Ensemble

$$W_n \propto e^{-(E_n - \mu N_n)/k_B T} \tag{3}$$

gegeben ist.

*Hinweis:* Benutzen Sie die Methode ("zweite Herleitung") , die in der Vorlesung zur Herleitung des kanonischen Ensembles benutzt wurde.

(b) Wir betrachten ein System $A$ und ein Reservoir $R$, die Energie und Impuls austauschen können. Der Impuls des Gesamtsystems $A + R$ ist erhalten und kann durch die Verallgemeinerung des mikrokanonischen Ensembles beschrieben werden (siehe Aufgabe 2). Berechne die Wahrscheinlichkeit, System $A$ in einem Zustand $n$ mit Energie $E_n$ und Impuls $Q_n$ zu finden.