

Moderne Theoretische Physik III SS 2015

Prof. Dr. A. Mirlin

Blatt 06, 100 Punkte

Dr. U. Karahasanovic, Dr. I. Protopopov

Besprechung 05.06.2015

Die Abgabe ist jeweils bis spätestens Freitag, 09:30 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten im Eingangsbereich des Physik-Hochhauses zu tätigen.

1. Thermodynamics of phonons (5 + 10 + 5 + 15 + 10 = 45 Punkte, mündlich)

Akustische und optische Phononen in einer harmonischen Kette.

$2N$ identische Massen m können sich auf der x -Achse reibungsfrei bewegen und sind abwechselnd mit unterschiedlichen Federn $K > G$ verbunden:

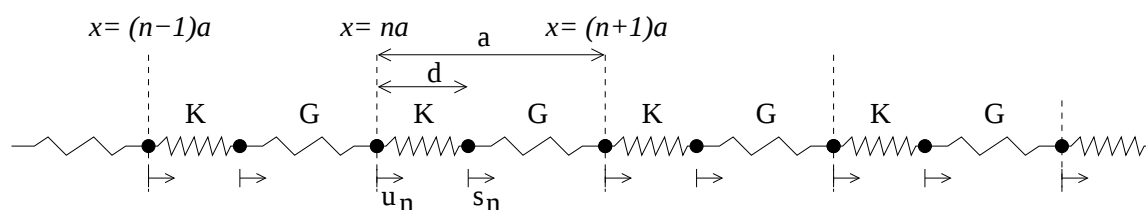


Abbildung 1: Harmonische Kette

Es sollen die klassischen Bewegungsgleichungen für kleine Auslenkungen u_n und s_n aus den jeweiligen Ruhelagen bei $x = na$ und $x = (na + d)$ gelöst werden. Die Lagrange-Funktion lautet

$$\mathcal{L}(u_n, s_n, \dot{u}_n, \dot{s}_n) = T - U, \quad \text{wobei} \quad U = \frac{K}{2} \sum_n (u_n - s_n)^2 + \frac{G}{2} \sum_n (u_{n+1} - s_n)^2,$$

(a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen. Zeigen Sie dann für den Ansatz

$$u_n(t) = u e^{i(kx - \omega t)}, \quad s_n(t) = s e^{i(kx - \omega t)}, \quad x = na,$$

dass periodische Randbedingungen

$$u_{n+N}(t) = u_n(t), \quad s_{n+N}(t) = s_n(t)$$

auf die Einschränkung

$$k = \frac{2\pi}{a} \frac{m}{N}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

führen, und dass für eine eindeutige Lösung $-\frac{\pi}{a} < k \leq \frac{\pi}{a}$ gelten muß.

(b) Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen als 2×2 -Matrix und bestimmen Sie nun die Frequenzen $\omega_+(k)$, $\omega_-(k)$ der Eigenmoden der Kette, geben Sie jeweils auch s/u an. Wie verhalten sich $\omega_{\pm}(k)$ und s/u für kleine $|k| \ll \pi/a$? Was bedeutet das Ergebnis anschaulich? Skizzieren Sie $\omega_{\pm}(k)$ für alle erlaubten k . Wie viele akustische (-) und optische (+) Eigenmoden besitzt die Kette?

Photonenquantisierung und Thermodynamik

Die in Aufgaben 1a und 1b berechneten Gitterschwingungen haben die Form harmonischer Oszillatoren und können somit wie aus der Quantenmechanik bekannt

quantisiert werden. Die so entstandenen Schwingungszustände heißen akustische bzw. optische Phononen und die Besetzungszahl eines Schwingungszustands gehorcht der Bose-Einstein-Statistik. Da die Anzahl von Phononen keine Erhaltungsgröße ist, ist im Gleichgewicht das chemische Potential null.

- (c) Notieren Sie sich den allgemeinen Ausdruck für das Ω -Potential (der in diesem Fall gleich der freien Energie F ist) von Phononen bezüglich ihrer Eigenmoden $\omega_{\pm}(k)$ im thermodynamischen Limit $N \rightarrow \infty$.
- (d) Das Spektrum der Phononen hat mehrere Eigenfrequenzen:

$$\omega_{-}(k = \pi/a) < \omega_{+}(k = \pi/a) < \omega_{+}(k = 0). \quad (1)$$

Nehmen wir an, dass die Lücke im Spektrums der Phononen groß ist, $\omega_{+,k=\pi/a} \gg \omega_{-,k=\pi/a}$. Berechnen Sie das Ω -Potential von Phononen und die Wärmekapazität des Systems in jedem der Temperaturbereiche.

- i) $k_B T \gg \hbar \omega_{+}(k = 0)$;
- ii) $\hbar \omega_{-}(k = \pi/a) \ll k_B T \ll \hbar \omega_{+}(k = \pi/a)$;
- iii) $k_B T \ll \hbar \omega_{-}(k = \pi/a)$.

Wie sind die Ergebnisse von i) und ii) mit dem Gleichverteilungssatz der klassischen Statistik vereinbar? Erfassen sie das Verhalten der Wärmekapazität bei Änderung der Temperatur.

- (e) Entfernen Sie sich nun von der Vorstellung des 1D Modell und betrachten Sie einen Kristall in D räumliche Dimensionen. Dieser besitzt D akustischen Moden mit den linearen Dispersionsrelationen $\omega_{i,k} = c_i(\hat{k})|\vec{k}|$ bei kleinem Wellenvektor $\vec{k}$ ($i = 1, \dots, D$ und $\hat{k} = \vec{k}/|\vec{k}|$ ist ein Einheitsvektor in der Richtung $\vec{k}$). Zeigen Sie, dass sich die Wärmekapazität des Kristalls bei tiefen Temperaturen wie das Potenzgesetz, $c_V \propto T^\alpha$ verhält und finden sie den Exponenten α .

2. Ultrarelativistisches, entartetes Fermigas (10+5+10=25 Punkte, mündlich)

Komprimiert man ein Gas von Fermionen, so nimmt die mittlere Energie der Elektronen zu, d.h. die Fermienergie E_F wächst an. Wenn E_F mit mc^2 vergleichbar wird, wobei m die Masse der Teilchen und c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet, so werden relativistische Effekte wesentlich. Wir betrachten hier ausführlich das vollständig entartete ultrarelativistische Elektronengas. Die Energie der Teilchen soll im Folgenden als groß im Vergleich zu mc^2 angenommen werden. Bekanntlich hängt in diesem Fall die Energie eines Teilchens mit seinem Impuls durch die Beziehung

$$\varepsilon(\vec{p}) = c|\vec{p}| \quad (2)$$

zusammen.

Die Ergebnisse dieser Übung finden wichtige Anwendungen in der Astrophysik. Interessanterweise findet man solch eine lineare Dispersionsrelation auch für Elektronen im zweidimensionalen Kohlenstoffmaterial Graphen (A. Geim und K. Novoselov, Nobelpreis 2010).

- (a) Betrachten Sie das ultrarelativistischen Elektronengas bei $T = 0$. Finden Sie den Fermiimpuls p_F , die Fermienergie E_F , die innere Energie des Systems U und den Druck p als Funktion des Volumens V und der Dichte $n = N/V$. Zeigen Sie, dass p und U durch

$$pV = U/3. \quad (3)$$

zusammenhängen.

- (b) Wenn $T > 0$ ist, dann kann man die thermodynamische Größen durch Integrale über die Fermi-Funktion ausdrücken. Bestimmen Sie auf diesem Weg das großkanonische Potential $\Omega(T)$, die innere Energie $U(T)$. Überprüfen Sie außerdem, dass gilt

$$\Omega = -\frac{1}{3}U. \quad (4)$$

- (c) Berechnen Sie die spezifische Wärme eines entarteten ultrarelativistischen Fermi-Gas bei niedrigen Temperaturen ($T \ll E_F$).

3. Planck- Verteilung und der Strahlungsdruck

(15 + 15 = 30 Punkte, schriftlich)

Betrachten Sie einen schwarzen Körper bei der Temperatur T im Gleichgewicht mit seiner Strahlung.

- (a) Finden Sie die durchschnittliche Anzahl von Photonen, die das Element innerhalb des Zeitintervalls dS auf der Oberfläche des Körpers treffen.

Hinweise: Sie hatten bisher ein ähnliches Problem für ein ideales Boltzmann Gas in Übung 3 von Übungsblatt 4.

- (b) Jedes Photon welches auf ein Element dS trifft, wird von dem Körper absorbiert und überträgt seinen Impuls $\vec{p}$ auf ihn. Finden Sie den mittleren Impuls, der durch die Photonen, welche durch das Element dS im Zeitintervall dt absorbiert werden, auf den Körper übertragen wird. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Strahlungsdruck $p = 4\sigma T^4/3$ (σ ist die Stefan-Boltzmann Konstante, siehe Vorlesung).

Hinweise: Was ist mit den Photonen, welche durch den Körper emittiert wurden?