Moderne Theoretische Physik III SS 2015

Prof. Dr. A. Mirlin
Dr. U. Karahasanovic, Dr. I. Protopopov

Blatt 06, 100 Punkte
Besprechung 12.06.2015

Die Abgabe ist jeweils bis spätestens Freitag, 09:30 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten im Eingangsbereich des Physik-Hochhauses zu tätigen.

1. Thermodynamik von Spinsystemen: Beliebiger Spin

$(5 + 10 + 5 + 10 = 30$ Punkte, mündlich)

Betrachten Sie ein System aus N nichtwechselwirkenden Teilchen mit Spin S in einem Magnetfeld $\mathbf{B}$. Der Hamilton-Operator eines solchen Systems ist durch $\mathcal{H} = -\mu \sum_{i=1}^{N} S_i^z B$ gegeben, wobei S_i^z hier die Werte $-S, -S+1, \ldots S$ annehmen kann und μ das magnetische Moment eines Spins bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme Z eines solchen Systems.

(b) Berechnen Sie die freie Energie, die Entropie und die spezifische Wärme C_B bei konstantem Magnetfeld für dieses System.

(c) Berechnen Sie die durchschnittliche Magnetisierung

$$M = -\partial_B F \tag{1}$$

eines solchen Systems. Zeichnen Sie diese als Funktion des Magnetfelds B. Finden Sie die magnetische Suszeptibilität pro Teilchen bei konstanter Temperatur

$$\chi_T = \frac{1}{N} \left.\frac{\partial M}{\partial B}\right|_{B=0}. \tag{2}$$

Hinweis: Der Fall $S = 1/2$ wurde in der Vorlesung betrachtet.

(d) Betrachten Sie ein Spinsystem bei der Temperatur T, das sich im Magnetfeld B befindet und ansonsten von der Außenwelt isoliert ist. Wir reduzieren nun adiabatisch (sehr langsam) das magnetische Feld auf den Wert αB, $0 < \alpha < 1$. Was ist die Temperatur des Systems am Ende des Prozesses?
Hinweis: Unser System ist thermisch isoliert und der Prozess adiabatisch. Was bedeutet das für die Entropie des Systems?

2. Die paramagnetische Antwort eines Elektronengases (Pauli Paramagnetismus)

$(5 + 10 + 10 + 10 = 35$ Punkte, schriftlich)

In dieser Übung betrachten wir die Wirkung eines Magnetfeldes auf Spin 1/2 nichtwechselwirkende Fermionen. Wir lassen den Einfluss des Magnetfeldes auf die Orbitalbewegung der Elektronen beiseite (diese führt zum sogenannten Landau Diamagnetismus). Somit erhält man aus unserem Modell nur einen Teil der magnetischen Antwort eines Elektronengases. Es lässt sich aber auf ein Neutronengas übertragen.

(a) Der Hamilton-Operator des Systems hat die Form

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} - \mu_s \vec{\sigma}_i \vec{B}. \tag{3}$$

Dabei läuft die Summe über die Teilchen im System, $\vec{\sigma}_i$ ist ein Vektor aus Pauli-Matrizen, die auf den Spin des i-ten Teilchens wirken und μ_s ist das magnetische

Moment ($\mu_s = \mu_B \equiv e\hbar/2mc$ für Elektronen). Finden Sie die Energien der Einteilchenzustände im System und berechnen Sie das Ω-Potential des Gases, $\Omega(T, V, \mu, B)$.

Hinweis: Geben Sie Ihre Lösung in Abhängigkeit des Ω-Potentials in Abwesenheit des Feldes $\Omega(T, V, \mu)$ an, welches in der Vorlesung diskutiert wurde.

(b) Setzen Sie unter Verwendung des Ergebnisses aus Aufgabe 2a die magnetische Suszeptibilität χ_T (pro Teilchen), und die Kompressibilität des Systems bei Nullfeld $\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{T,V}$ zueinander in Beziehung.

Hinweis: Verwenden sie, entsprechend der Definition des Ω-Potentials,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = -N. \tag{4}$$

(c) Betrachten Sie das fermionische Gas bei hohen Temperaturen, $T \gg E_F$. Finden Sie die Suszeptibilität (pro Teilchen) in diesem Bereich. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit den beiden entsprechenden Antworten aus Aufgabe 1.

(d) Finden Sie die magnetische Suszeptibilität bei Temperatur Null. Skizzieren Sie die Temperaturabhängigkeit der magnetischen Suszeptibilität im Intervall von niedrigen, $T \ll E_F$, bis zu hohen Temperaturen $T \gg E_F$.

3. Spin-Systeme und negative Temperaturen

($5 + 15 + 15 = 35$ Punkte, mündlich)

Das Energiespektrum eines Spin-Systems ist nach oben beschränkt. Diese Eigenschaft erlaubt es dem Spin-System exotische Gleichgewichtszustände (oder, falls das Spin-System in schwachem Kontakt zu einem normalen Reservoir steht, Quasigleichgewichtszustände) zu tragen, die durch eine negative Temperatur charakterisiert sind.

(a) Betrachten Sie ein System von $N \gg 1$ nicht-wechselwirkenden Spins $s = 1/2$ im Magnetfeld B, welches durch den folgenden Hamiltonoperator beschrieben wird

$$H = -\mu B \sum_i \sigma_i^z \equiv= -\epsilon_0 \sum_i \sigma_i^z. \tag{5}$$

Bestimmen Sie die erlaubten Werte für die Energie des Gesamtsystems? Berechnen Sie die Zahl der Zustände des Systems $N(E)$, die die gegebene Energie $E = -N\epsilon_0 + 2\epsilon_0 n$ haben ($n \in \mathbb{Z}$).

(b) Wir betrachten nun das mikrokanonische Ensemble für das Spin-System. Bestimmen Sie die Entropie $S(E)$ und die Temperatur $T(E)$ des Systems als Funktion der Energie. Zeigen Sie, dass die Temperatur für $E > 0$ negativ wird. Bestimmen Sie die Energie des Systems als Funktion der Temperatur $E(T)$.

Hinweis 1: Die Entropie im mikrokanonischen Ensemble ist definiert durch

$$S(E) = k_B \ln N(E). \tag{6}$$

Hinweis 2: Beachten Sie, dass das System groß ist, $N \gg 1$, und nehmen Sie an, dass wir an Energien E nicht zu nahe an den Grenzen des Spektrums interessiert sind, sodass $E + N\epsilon_0 \gg \epsilon_0$ und $N\epsilon_0 - E \gg \epsilon_0$.

(c) Betrachten Sie nun zwei Spin-Systeme (N Spins in jedem), die die Temperaturen T_1 bzw. T_2 besitzen. Wir nehmen an, dass $T_1 < 0$ während T_2 beide Vorzeichen haben kann. Nachdem die Systeme in thermischen Kontakt gebracht werden, relaxieren sie ins Gleichgewicht. Berechnen Sie die Temperatur des Gesamtsystems am Ende der Thermalisierung. Skizzieren Sie ihre Abhängigkeit von T_2 bei einer festen Temperatur T_1.