Moderne Theoretische Physik III SS 2015

Prof. Dr. A. Mirlin
Dr. U. Karahasanovic, Dr. I. Protopopov

Blatt 10, 100 Punkte
Besprechung 03.07.2015

Die Abgabe ist jeweils bis spätestens Freitag, 09:30 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten im Eingangsbereich des Physik-Hochhauses zu tätigen.

1. Landau-Theorie

($5 + 5 + 10 + 5 + 5 + 15 + 5 = 50$ Punkte, schriftlich)

In der Vorlesung haben wir die Anwendung der Landau-Theorie zur Beschreibung eines Phasenübergangs zweiter Ordnung diskutiert. Wir haben angenommen, dass das System mit einem skalaren Ordnungsparameter $\phi(r)$ beschrieben werden kann. Der Ordnungsparameter $\phi(r)$ beschreibt die spontane Brechung einer diskreten Symmetrie. Das Landau-Funktional hat die Form (wir vernachlässigen Gradiententerme, da diese für die Übung irrelevant sind)

$$\mathcal{F} = \int d^d r \frac{t}{2}\phi^2(r) + b\phi^4(r) - h\phi(r)\,, \qquad t = a(T - T_c). \tag{1}$$

In Abwesenheit von externen Feldern ist das Landau Funktional symmetrisch bezüglich $\phi \to -\phi$. Diese Symmetrie drückt die Symmetrie das vorliegenden mikroskopischen Hamilton-Operators aus (z.B. Ising-Modell). Der Koeffizient b ist eine positive Konstante, deren Temperaturabhängingkeit in der Nähe von T_c vernachlässigt werden kann.

In dieser Übung diskutieren wir zwei wichtige Modifikationen der oben beschriebenen Landau-Theorie:

1. Landau-Theorie für Phasenübergänge erster Ordnung und kritische Exponenten;
2. Landau-Theorie für trikritische Punkte.

(a) Der Phasenübergang vom Gas zur Flüssigkeit (der entlang der Linie $p(T)$ im $p-T$-Diagramm stattfindet) ist ein typisches Beispiel für einen Phasenübergang erster Ordnung. Die Linie $p(T)$ endet an einem Punkt (p_c, T_c), der Flüssigkeit-Gas kritischer Punkt genannt wird. Für Temperaturen größer als T_c gibt es keinen Unterschied zwischen Gas und Flüssigkeit. Lasst uns nun die Landau-Theorie auf die Beschreibung des Systems in der Nähe des kritischen Punktes anwenden. Im vorliegenden Fall wird die Rolle des Ordnungsparameters durch die Differenz in der Dichte von Gas und Flüssigkeit, $\phi = \rho_{\mathrm{l}} - \rho_{\mathrm{g}}$, gespielt. Der Ordnungsparameter verschwindet bei $T > T_c$ und wir erwarten, dass er klein in der Nähe von T_c ist. Daher kann das Landau-Funktional in Exponenten von ϕ entwickelt werden

$$\mathcal{F} = \int d^d r \left(-h\phi + \frac{t}{2}\phi^2 - \mu\phi^3 + b\phi^4\right). \tag{2}$$

Die Koeffizienten des Landau-Funktionals sind Funktionen von T und p. Die Bedingung $b > 0$ wird auf Grund der Stabilität benötigt. Denke darüber nach, warum ungerade Exponenten von ϕ in der Entwicklung vorkommen. Zeige, dass wir durch einen Shift des Ordnungsparameters ϕ das Landau-Funktional auf die Standardform reduziert werden kann

$$\mathcal{F} = \int d^d r \left(-\tilde{h}\phi + \frac{\tilde{t}}{2}\phi^2 + b\phi^4\right). \tag{3}$$

Die redefinierten Parameter sind $\tilde{h}$ und $\tilde{t}$.

(b) Zeige, dass für $\tilde{t} > 0$ und für beliebiges $\tilde{h}$ das Funktional $\mathcal{F}(\phi)$ ein eindeutiges Minimum als Funktion von ϕ hat. Was ist die physikalische Interpretation? Zeichne $\mathcal{F}(\phi)$ in diesem Regime.

(c) Lasst uns $\tilde{t} < 0$ annehmen. Zeige, dass in diesem Regime, abhängig von der Größenordung von $\tilde{h}$, $\mathcal{F}$ ein oder zwei Minima haben kann. Interpretiere diese. Zeichne $\mathcal{F}(\phi)$.

(d) Zeichne das Phasendiagramm des System in der $(\tilde{t}, \tilde{h})-$Ebene.
Hinweis: Zeige, dass der Strahl $(\tilde{h} = 0, \tilde{t} < 0)$ eine Linie des Phasenübergangs erster Ordnung ist und der Punkt $(\tilde{t} = 0, \tilde{h} = 0)$ der kritische Punkt ist.

(e) Wir gehen nun zurück zu dem Standard-Landau-Funktional, das die Symmetrie $\phi \to -\phi$ besitzt.

$$\mathcal{F} = \int d^d r \frac{t}{2}\phi^2(r) + b\phi^4(r) \tag{4}$$

Die Koeffizienten t und b sind Funktionen der externen Kontrollparametern (z.B. T und p). Durch Veränderung eines Parameters (T bei festem p) kann man das System zu einem Punkt von einen Phasenübergang zweiter Ordnung bringen ($t = 0, b > 0$). In manche Fällen kann man durch die Veränderung von zwei Kontrollparametern (z.B. beide T und p) kann man erreichen, dass beide t und b verschwinden. In dieser Situation sollte die Entwicklung des Landau-Funktionals bis zum Term ϕ^6 fortgesetzt werden

$$\mathcal{F} = \int d^d r \frac{t}{2}\phi^2 + b\phi^4 + c\phi^6\,, \qquad c > 0 \tag{5}$$

Analysiere das modifizierte Landau-Funktional für $b > 0$. Zeige, dass der Strahl $(b > 0, t = 0)$ eine Linie des Standardphasenübergangs zweiter Ordnung ist.

(f) Analysiere das Verhalten von $\mathcal{F}(\phi)$ für $b < 0$. Zeige, dass in diesem Regime das System einen Phasenübergang erster Ordnung bei $t = b^2/2c$ erfährt. Zeichne das Phasendiagramm des Systems in der $(b, t)-$Ebene. Der Punkt $(b = 0, t = 0)$ wird trikritischer Punkt genannt.

(g) Antiferromagneten haben häufig trikritische Punkte in ihren $(T, H)-$Phasendiagrammen (H ist das externe Magnetfeld). Der Ordnungsparameter ϕ ist in diesem Fall die Magnetisierung. Warum beschreibt das Landau-Funktional (5) (unter der Symmetrie $\phi \to -\phi$) einen Antiferromagneten in einem externen Magnetfeld richtig?

3. Goldstone Moden und das Mermin-Wagner Theorem

$(5 + 5 + 10 + 25 + 5 = 50$ Punkte, mündlich)

In der Vorlesung haben wir im Detail die Landau Theorie mit einem skalaren Ordnungsparameter ϕ besprochen. Eine solche Theorie beschreibt Phasenübergänge, die mit der spontanen Brechung einer diskreten Symmetrie assoziiert sind (z.B. das Ising Modell). Es gibt Systeme, in denen der Phasenübergang mit der Brechung einer kontinuierlichen Symmetrie einhergeht. In dieser Übung betrachten wir ein Beispiel dafür, die entsprechende Landau Theorie und einige ihrer Konsequenzen.

(a) Betrachten wir einen *easy-plane* Magneten in D räumlichen Dimensionen, d.h. ein D dimensionales Gitter mit magnetischen Momenten $\vec{\sigma}_r$, die gezwungen sind in einer Ebene zu liegen, $\vec{\sigma}_r = (\sigma_r^x, \sigma_r^y)$. Der Hamilton Operator des Systems ist (die Summe ist auf nächste Nachbarn im Gitter beschränkt)

$$H = -J \sum_{\langle r, r' \rangle} \vec{\sigma}_r \vec{\sigma}_{r'}. \tag{6}$$

Dieser Hamilton Operator ist invariant bezüglich der simultanen Rotation aller magnetischen Momente in der (x, y)-Ebene. Bei hohen Temperaturen ist das System in einem paramagnetischen Zustand mit verschwindender mittlerer Magnetisierung. Wenn die Temperatur erniedrigt wird, kann das System in einen ferromagnetischen Zustand übergehen, der durch ein endliches magnetisches Moment $m = \langle \vec{\sigma}_r \rangle$ charakterisiert ist und die Rotationsinvarianz bricht. Der Ordnungsparameter des Systems ist ein zweidimensionaler Vektor $\vec{m}(r)$. Benutzen Sie diese Symmetrieargumente um zu zeigen, dass das Landau Funktional dieses Phasenübergangs die folgende Form hat:

$$\mathcal{F}(m) = \int d^d r \left[\frac{t}{2} |\vec{m}(r)|^2 + b|\vec{m}(r)|^4 + \frac{K}{2} \left((\nabla m_x)^2 + (\nabla m_y)^2 \right) \right], \tag{7}$$

$$\vec{m} = (m_x, m_y), \qquad |\vec{m}|^2 = m_x^2 + m_y^2 \qquad t = a(T - T_c). \tag{8}$$

(b) Das Landau Funktional $\mathcal{F}(m)$ wird durch uniforme Ordnungsparameterkonfigurationen minimiert, $\vec{m}(r) = \text{const.}$. Auf Grund der Rotationssymmetrie können wir $\vec{m}(r) = (m_0, 0)$ wählen. Schreiben Sie die Sattelpunktsgleichungen für m_0 auf. Zeigen Sie, dass für $T > T_c$ $\mathcal{F}(m)$ sein Minimum bei $m_0 = 0$ erreicht, während für $T < T_c$ das Minimum bei $m_0 = \sqrt{|t|/4b}$ liegt.

(c) Betrachen wir nun Fluktuationen des Ordnungsparameters in der symmetriegebrochenen Phase, $T < T_c$. Wir schreiben $\vec{m}(r) = (m_0 + \delta m_c(r), \delta m_y(r))$. Zeigen Sie, dass in der Gauss'schen Näherung, das Landau Funktional, das kleine Fluktuationen des Ordnungsparameters beschreibt, wie folgt aussieht:

$$\mathcal{F} = \text{const} + \int d^D r \left(\frac{K}{2} (\nabla \delta m_x)^2 + |t| \delta m_x^2 \right) + \int d^D r \frac{K}{2} (\nabla \delta m_y)^2 \tag{9}$$

In der führenden Näherung, Gl. (9), sind die Fluktuationen δm_x und δm_y unabhängig. Der Teil des Landau Funktionals, das Fluktuationen von δm_x beschreibt, ist ähnlich zu seinem Analogon für die skalare Landau Theorie, die in der Vorlesung besprochen wurde.

Deutlich interessanter sind die Fluktuationen δm_y mit dem Landau Funktional

$$\mathcal{F}[\delta m_y] = \int d^D r \frac{K}{2} (\nabla \delta m_y)^2. \tag{10}$$

Gemäß Gl. (10) sind die Fluktuationen δm_y masselos: Die Energie für eine Fluktuation $\delta m_y(r)$ mit gegebener Amplitude kann beliebig klein gemacht werden, wenn $\delta m_y(r)$ langsam im Raum variiert. Der Grund für das Auftreten dieser masselosen Mode ist gerade die Brechung einer kontinuierlichen Symmetrie. Die Mode δm_y und ähnliche masselose Moden werden Goldstone Moden genannt.

(d) Wir sind nun in der Lage den Beitrag von δm_y zu den Fluktuationen des Ordnungsparameters zu untersuchen. Wir interessieren uns für

$$\langle \delta m_y(0) \delta m_y(r) \rangle = \frac{1}{Z} \int \delta m_y(0) \delta m_y(r) e^{-\beta \mathcal{F}[\delta m_y]} \mathcal{D} \delta m_y, \tag{11}$$

$$Z = \int \delta e^{-\beta \mathcal{F}[\delta m_y]} \mathcal{D} \delta m_y. \tag{12}$$

Dazu müssen wir die Funktionalintegrale in Gln. (11) und (12) ausführen. Dafür nutzen wir die Fourier Entwickung von $\delta m_y(r)$

$$\delta m_y(r) = \sum_{\vec{q}}{}' \left[a_{\vec{q}} \exp(i\vec{q}\vec{r}) + a_{\vec{q}}^* \exp(-i\vec{q}\vec{r}) \right]. \tag{13}$$

Die Summation geht über den D-dimensionalen Impuls $\vec{q} = (q_1, \dots q_D)$ mit $q_1 > 0$ (beachten Sie, dass das Feld $\delta m_y(r)$ reell ist). Das Integrationsmaß im Funktionalintegral kann mittels der Fourierkomponenten wir folgt geschrieben werden:

$$\mathcal{D}\delta m_y(r) = \prod_{\vec{q}}{}' d \,\mathrm{Im}\, a_{\vec{q}} \;\, d \,\mathrm{Re}\, a_{\vec{q}} \tag{14}$$

Schreiben Sie das Landau Funktional $\mathcal{F}[\delta m_y]$ und das Produkt $\delta m_y(0)\delta m_y(r)$ mit Hilfe der Fourierkomponenten $a_{\vec{q}}$ um. Führen sie so die Integrale (11) und (12) aus. Zeigen Sie, dass die Korrelationsfunktion (11) durch

$$\langle \delta m_y(0)\delta m_y(r)\rangle = \frac{1}{\beta}\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D}\frac{1}{Kq^2}\exp(i\vec{q}\vec{r}) \tag{15}$$

gegeben ist. Vergleichen Sie Gl. (15) mit der Korrelationsfunktion $G(r)$ der Ordnungsparameterfluktuationen in der skalaren Landau Theorie, die in der Vorlesung diskutiert wurde.

(e) Analysieren Sie die Konvergenz des Integrals (15) bei kleinen $\vec{q}$ und Zeigen Sie, dass die spontane Brechung einer kontinuierlichen Symmetrie in $D \leq 2$ Dimensionen nicht möglich ist (Mermin-Wagner theorem).