

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 15

Prof. Dr. A. Mirlin

Blatt 11: 100 Punkte + 70 Bonus Punkte

Dr. Una Karahasanovic, Dr. Ivan Protopopov

Besprechung 10.07.2015

1. Hüpfen zwischen nächsten Nachbarn (12 + 13 + 25 = 50 Punkte, schriftlich)

Die Operatoren $c_n^\dagger$ und c_n erzeugen bzw. vernichten Fermionen in orthogonalen einteilchen Orbitalen, die mit n numeriert werden. Die Operatoren $\gamma_k^\dagger$ und γ_k , wobei k wieder eine natürliche Zahl ist, werden aus $c_n^\dagger$ und c_n konstruiert gemäß,

$$\gamma_k^\dagger = \sum_{n=1}^N U_{kn} c_n^\dagger. \quad (1)$$

- (a) Finde die Bedingung an die Matrix U (welche aus den Elementen U_{kn} besteht), die dafür sorgt dass $\gamma_k^\dagger$ und γ_k die gleichen fermionischen Antikommutatorrelationen erfüllen wie $c_n^\dagger$ und c_n .

Ein Modell für das Hüpfen von spinlosen Fermionen auf einer eindimensionalen Kette mit N Gliedern wird durch den Hamiltonoperator

$$H = -t \sum_{n=1}^N (c_{n+1}^\dagger c_n + c_n^\dagger c_{n+1}), \quad (2)$$

beschrieben, mit $t > 0$ und der periodischen Randbedingung, $c_{N+1} = c_1$.

- (b) Zeige dass die Wahl,

$$U_{kn} = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(\frac{2\pi i k n}{N}\right) \quad (3)$$

die Bedingung an U erfüllt.

- (c) Zeige weiterhin dass sich H auch schreiben lässt als,

$$H = \sum_{k=1}^N E_k \gamma_k^\dagger \gamma_k \quad (4)$$

und bestimme E_k .

2. Zweizustandssystem (15 + 20 + 15 = 50 Punkte, mündlich)

Ein einfaches Modell für die Kopplung einer Strahlungsmode an ein Zweizustandssystem kann folgendermaßen definiert werden. Die Strahlungsquanten werden durch die Operatoren $b^\dagger$ und b erzeugt bzw. vernichtet, welche die Kommutatorrelation $[b, b^\dagger] = 1$ erfüllen. Der Zustand des Zweizustandssystems wird durch die Operatoren $f^\dagger$ und f verändert, mit den definierenden Eigenschaften $\{f, f^\dagger\} = 1$ und $f^2 = 0$. Die zwei

Typen von Operatoren kommutieren miteinander: $[b, f] = [b^\dagger, f] = 0$ und der Hamiltonoperator ist

$$H = \epsilon b^\dagger b + \omega f^\dagger f + \lambda(b^\dagger f + f^\dagger b), \quad (5)$$

wo ϵ die Energie der Strahlungsquanten, ω die Energieaufspaltung des Zweizustandssystems, und λ die Kopplungskonstante ist. Für den Vakuumzustand $|0\rangle$ gilt $\langle 0|0\rangle = 1$, $f|0\rangle = 0$, und $b|0\rangle = 0$. Sei $B = b^\dagger b$ und $F = f^\dagger f$.

(a) Zeige dass $[H, B + F] = 0$.

(b) Erkläre wieso aus (a) folgt dass die Eigenzustände von H die Form

$$|\psi\rangle = [u_n(b^\dagger)^{n-1}f^\dagger + v_n(b^\dagger)^n] |0\rangle \quad (6)$$

haben, wobei u_n und v_n Konstanten sind.

(c) Zeige damit dass die Eigenwerte von H die Gestalt haben:

$$n\epsilon + \frac{\omega - \epsilon}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega - \epsilon}{2}\right)^2 + n\lambda^2}. \quad (7)$$

3. Diagonalisieren quadratischer Hamiltonoperatoren

(35 + 35 = 70 Bonus Punkte, mündlich)

(a) Betrachte ein System bestehend aus zwei verschiedenen Bosonen welche durch die Einteilchen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a^\dagger$, a und $b^\dagger$, b beschrieben werden. Der Hamiltonoperator sei,

$$H = \epsilon_A a^\dagger a + \epsilon_B b^\dagger b + \lambda(a^\dagger b^\dagger + ba) \quad (8)$$

mit $\epsilon_A < \epsilon_B$. Zeige dass H umgeformt werden kann zu

$$H = \omega_C c^\dagger c + \omega_D d^\dagger d + \text{constant}, \quad (9)$$

mit $\omega_C < \omega_D$, wobei $c^\dagger$, c , $d^\dagger$, und d auch bosonische Operatoren sind. Bestimme die Verknüpfung zwischen den Operatoren a , b und c , d und zeige dass gilt,

$$\begin{aligned} \omega_C &= \frac{1}{2} \left\{ [(\epsilon_A + \epsilon_B)^2 - 4\lambda^2]^{1/2} - (\epsilon_B - \epsilon_A) \right\}, \\ \omega_D &= \frac{1}{2} \left\{ [(\epsilon_A + \epsilon_B)^2 - 4\lambda^2]^{1/2} + (\epsilon_B - \epsilon_A) \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Bestimme die Erwartungswerte $\langle c^\dagger c \rangle$ und $\langle a^\dagger a \rangle$ bezüglich des Grundzustands.

(b) Betrachte ein System von Spins mit unterschiedlichen Beträgen S_A and S_B die ein einfach kubisches Gitter mit Gitterkonstante a abwechselnd besetzen (die Dimension $D = 3$). Die Spins wechselwirken mit ihren nächsten Nachbarn durch antiferromagnetischen Austausch der Stärke J . Durch eine ungefähre Holstein-Primakoff-Transformation kann der Hamiltonoperator in der Wellenvektorrepräsentation ausgedrückt werden als,

$$H = -NJzS_AS_B + Jz \sum_{\mathbf{k}} \left\{ S_B a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + S_A b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} + (S_AS_B)^{1/2} \left[z^{-1} \sum_{j=1}^z \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_j) \right] (a_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}}^\dagger + b_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}) \right\}$$

wo $\mathbf{e}_j$ die Verbindungsvektoren zwischen den zwei Untergittern sind und z die Koordinationszahl. $a^\dagger$, $b^\dagger$ sind bosonische Operatoren definiert auf den jeweiligen Untergittern A und B, die die Kommutatorrelationen $[a^\dagger, b] = [a, b] = 0$ erfüllen. Zeige, unter der Annahme $S_A > S_B$ und $(S_A - S_B) \ll S_A$, dass das Spektrum für niedere energetische Anregungen für große Wellenlängen zwei verschiedene Regime besitzt, $ka \ll k_0a$ and $k_0a \ll ka \ll 1$, jeweils mit der Energie $\omega(k) \sim k^\alpha$. Bestimme die charakteristische Wellenzahl k_0 und die Werte von α in den beiden Regimen.