

Moderne Theoretische Physik III SS 2015**Prof. Dr. A. Mirlin****Blatt 12, 100 Punkte + 50 Bonuspunkte****Dr. U. Karahasanovic, Dr. I. Protopopov****Besprechung 17.07.2015**

Die Abgabe ist jeweils bis spätestens Freitag, 09:30 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten im Eingangsbereich des Physik-Hochhauses zu tätigen.

1. Mastergleichung für ein zwei Niveau Atom

(20 + 10 + 10 = 40 Punkte, mündlich)

Wir betrachten ein Zweizustandsatom mit Energien $E_2 > E_1$. Die Wahrscheinlichkeiten das Atom in den korrespondierenden Zuständen zu finden sind p_i ($i = 1, 2$), wobei ($p_1 + p_2 = 1$). Die Wechselwirkung des Atoms mit dem elektromagnetischen Feld führt zu Übergängen zwischen den Zuständen mit Raten γ_{12} (Photon Absorption) und γ_{21} (Photon Emission). Die Master Gleichung für die Wahrscheinlichkeiten lautet:

$$\dot{p}_1 = \gamma_{21}p_2 - \gamma_{12}p_1 \quad (1)$$

$$\dot{p}_2 = \gamma_{12}p_1 - \gamma_{21}p_2 \quad (2)$$

- (a) Löse Gleichung (1) und (2) mit Anfangsbedingungen $p_i(t=0) = p_{i0}$ und bestimme die Zeitentwicklung der Wahrscheinlichkeiten p_i . Finde die Gleichgewichtslösung $p_i(t=\infty)$ und zeige, dass die Ungleichungen

$$0 \leq p_i \leq 1 \quad (3)$$

für alle Zeiten t erfüllt sind.

- (b) Werden die Übergänge zwischen den atomaren Niveaus durch die Wechselwirkung mit einem klassischen externen elektromagnetischem Feld der Frequenz $\omega \equiv E_2 - E_1$ angeregt, sind die Übergangsraten γ_{12} und γ_{21} durch Fermis goldene Regel gegeben und erfüllen

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = \Gamma. \quad (4)$$

Finde die Gleichgewichts-Wahrscheinlichkeiten $p_i(\infty)$. Interpretiere das Ergebnis. Hinweis: Wie ist die Temperatur des Systems bei $t = \infty$?

- (c) Werden die Übergänge zwischen den Niveaus durch die Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Quantenfeld (im Gleichgewicht) angeregt, sind die Übergangsraten gegeben durch (siehe z.b. Script von Prof. Schön)

$$\gamma_{12} = gN_B(\omega), \quad \gamma_{21} = g[1 + N_B(\omega)] \quad (5)$$

$N_B(\omega) = 1/(e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)$ ist hier die Bose Verteilung, g eine Konstante. Die zwei Terme in γ_{21} korrespondieren jeweils zu spontaner und stimulierter Emission. Zeige das die Raten (5) die Bedingung für detailliertes Gleichgewicht (detailed balance) erfüllen und finde die Gleichgewichtsverteilung $p_i(\infty)$.

2. Drei Niveau Atom Besetzungsinversion und Laser.

(20 + 20 + 20 = 60 Punkte, mündlich)

Ziel dieser Aufgabe ist es, die Physik eines drei Niveau Atoms zu untersuchen. Dies ist das einfachste System, dass als Laser benutzt werden kann. Seien die atomaren Energie Niveaus $E_1 < E_2 < E_3$.

- (a) Nehmen wir an, dass ein klassisches elektromagnetisches Feld Übergänge zwischen den Zuständen E_1 and E_3 mit einer Rate Γ antreibt. Desweiteren kann das Niveau E_3 spontan in Zustand E_2 mit einer Rate von γ_{32} zerfallen, während Zustand E_2 mit einer Rate von γ_{21} nach E_1 zerfallen kann. Zeige, dass die das System beschreibende Mastergleichung geschrieben wird als

$$\dot{p}_1 = \gamma_{21}p_2 + \Gamma p_3 - \Gamma p_1 \quad (6)$$

$$\dot{p}_2 = \gamma_{32}p_3 - \gamma_{21}p_2 \quad (7)$$

$$\dot{p}_3 = \Gamma p_1 - \Gamma p_3 - \gamma_{32}p_3 \quad (8)$$

Finde die Gleichgewichtslösungen $p_i(t = \infty)$ der Mastergleichung. Zeige, dass das Gleichgewicht bei $\gamma_{21} < \Gamma\gamma_{32}/(\Gamma + \gamma_{32})$ durch eine Besetzungsinversion der atomaren Niveaus charakterisiert wird $p_2(\infty) > p_1(\infty)$. Untersuche die Gleichgewichtslösungen im Grenzfall $\gamma_{21} \ll \gamma_{32} \ll \Gamma$.

- (b) Betrachten wir nun N unabhängige drei Niveau Systeme in einem Hohlraum (elektromagnetischer Resonator), der eine resonante elektromagnetische Mode mit Frequenz $\omega = E_2 - E_1$ aufweist. Die Photonen im Hohlraum können von den Atomen absorbiert werden (einhergehend mit Übergang $E_1 \rightarrow E_2$). Sie können auch einen stimulierten Übergang $E_2 \rightarrow E_1$ hervorrufen. Die korrespondierenden Übergangsraten sind identisch und proportional zur Anzahl der Photonen im Hohlraum, $\gamma_{12} = \gamma_{21}^{\text{st}} = gn$. Zur Vereinfachung vernachlässigen wir von nun an spontane Übergänge $E_2 \rightarrow E_1$. Zeige, dass die Mastergleichung nun ausgedrückt wird durch

$$\dot{p}_1 = gnp_2 + \Gamma p_3 - gnp_1 - \Gamma p_1 \quad (9)$$

$$\dot{p}_2 = gnp_1 + \gamma_{32}p_3 - gnp_2 \quad (10)$$

$$\dot{p}_3 = \Gamma p_1 - \Gamma p_3 - \gamma_{32}p_3. \quad (11)$$

Die Mastergleichung sollte durch die Gleichung für die Anzahl der Photonen im Hohlraum ergänzt werden. Da alle Übergänge $E_2 \rightarrow E_1$ n um 1 erhöhen und Übergänge $E_1 \rightarrow E_2$ n um 1 verringern, erhalten wir

$$\dot{n} = gnN(p_2 - p_1) - \kappa n. \quad (12)$$

Der letzte Term in Gleichung (12) beschreibt einen Abfluss von Photons aus dem Hohlraum in die Aussenwelt.

Die Lösungen der Gleichungen (9), (10), (11) und (12) werden sich dem Gleichgewichtszustand, der durch $p_i(\infty)$ und $n(\infty)$ charakterisiert ist, annähern. Benutze Gleichungen (9), (10) und (11) um $p_i(\infty)$ durch $n(\infty)$ und Übergangsraten auszudrücken. Analysiere das Ergebnis im Limes $\Gamma \rightarrow \infty$.

- (c) Benutze Gleichung (12) und die Ergebnisse aus Übung 2b um $n(\infty)$ zu finden (betrachte nur $\Gamma \rightarrow \infty$). Zeige, dass für $\kappa > gN$ im Gleichgewichtszustand $n(\infty) = 0$ gilt, während für die umgekehrte Bedingung gilt $n(\infty) > 0$. Finde die korrespondierenden $p_i(\infty)$.

Hinweis: Streng genommen hat das System für $\kappa < gN$ noch immer den Gleichgewichtszustand mit $n = 0$. Es kann jedoch gezeigt werden (nicht Aufgabe) dass die Lösung $n = 0$ in diesem Regime instabil ist.

3. Langevin-Gleichung: LRC-Schwingkreis

(15 + 15 + 20 = 50 Punkte, mündlich)

Wir betrachten einen stromgetriebenen LRC-Schwingkreis. Das Gleichgewicht der Ströme führt zur Bewegungsgleichung

$$C\ddot{V} + \frac{\dot{V}}{R} + \frac{V}{L} - \dot{I}_0 = \delta \dot{I}.$$

wobei $I = V/R - \delta I$ der Strom durch den Widerstand ist; δI beschreibt Nyquist-Rauschen, d.h. es gilt

$$\langle \delta I(t) \delta I(t') \rangle = \frac{2k_B T}{R} \delta(t - t').$$

- (a) Bestimmen Sie die Impedanz $Z(\omega) = V(\omega)/I(\omega)$ durch Fouriertransformation der Bewegungsgleichung.
- (b) Bestimmen Sie $\langle \delta V(\omega) \delta V(\omega') \rangle$.
- (c) Berechnen und skizzieren Sie die Korrelationen des Spannungsrauschens $\langle \delta V(t) \delta V(t') \rangle$ im Fall $(2RC)^2 > LC$.

Hinweis: Im letzten Teil der Aufgabe kann es hilfreich sein, einige Integrale mit den Methoden der komplexen Konturintegration zu berechnen. Der Residuensatz sagt aus, dass

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_j \text{Res}(f, a_j) \quad (13)$$

Dabei bezeichnet $\text{Res}(f, a_j)$ das Residuum der Funktion f an der Stelle a_j , und die Summe läuft über alle Singularitäten a_j von f , die von der Kontur C eingeschlossen werden.