Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 11

Prof. Dr. A. Shnirman
PD Dr. B. Narozhny, Dipl.-Phys. P. Schad

Blatt 1
Besprechung 22.4.2016

---

1. Integrabilitätsbedingung:

Eine Form

$$\delta\omega = f(x,y)dx + g(x,y)dy$$

heißt integrabel wenn eine Funktion $h(x,y)$ existiert, deren vollständiges Differential dh identisch mit $\delta\omega$ ist. Das ist genau dann der Fall, wenn die Integrabilitätsbedingung

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_x = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_y$$

erfüllt ist. Im Falle von nur zwei unabhängigen Variablen kann man immer einen integrierenden Faktor $\alpha(x,y) \neq 0$ finden, so daß die Form $\alpha\delta\omega$ integrabel ist.
Testen Sie, ob für die folgenden Fälle

(a) $f(x,y) = 3x^2 - 2xy - y^2$ und $g(x,y) = -x^2 - 2xy + y^2$,

(b) $f(x,y) = 3x + y$ und $g(x,y) = -x - 3y$,

$\delta\omega$ integrabel ist, und bestimmen Sie $h(x,y)$. Finden Sie dazu im Falle einer nichtintegrablen Form einen geeigneten integrierenden Faktor $\alpha(x,y)$ (Ansatz: $\alpha(x,y) = Ax+By$).

2. Legendretransformation:

Gegeben sei eine Kurve $U(S)$ in einem Bereich, in welchem sich das Vorzeichen ihrer Krümmung nicht ändert. Geben Sie eine eindeutige Darstellung der Kurve, indem Sie anstelle der Koordinaten S und U die Steigung $T = dU/dS$ sowie den U-Achsenabschnitt F der Tangente an jeden Kurvenpunkt als unabhängige Variable verwenden. Die Funktion $F(T)$ heißt Legendretransformierte zu $U(S)$. Auflösen der (obigen) Beziehung $T = T(S)$ nach S definiert eine Funktion $S = S(T)$.

(a) Zeigen Sie, daß die vollständigen Differentiale der Kurve und ihrer Legendretransformierten durch

$$dU(S) = T(S)dS \qquad \text{und} \qquad dF(T) = -S(T)dT$$

gegeben sind.

(b) Gegeben sei nun eine Fläche $U(S,V)$ mit positiver Steigung bezüglich S, negativer Steigung bezüglich V und unveränderlichem Vorzeichen der Krümmung. Führen Sie jeweils eine Legendretransformation für konstant gehaltenes V bzw. für konstant gehaltenes S durch. Die Steigungen seien durch $T = \partial U/\partial S|_V$ sowie $-P = \partial U/\partial V|_S$ gegeben. Auflösen von $T(S,V)$ nach S und $P(S,V)$ nach V definiert Funktionen $S(T,V)$ und $V(S,P)$. Bestimmen Sie analog zu oben die vollständigen Differentiale der Legendretransformierten $F(T,V)$ und $H(S,P)$. Die Funktionen $U(S,V)$, $F(T,V)$ und $H(S,P)$ entsprechen der inneren Energie, der freien Energie und der Enthalpie.

3. Funktionaldeterminantenkalkül:

Seien $u(x,y)$ und $v(x,y)$ Funktionen der unabhängigen Variablen x und y. Als Funktionaldeterminante bezeichnet man das Gebilde

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_y & \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_x \\ \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_y & \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_x \end{pmatrix} .$$

(a) Zeigen Sie die Relationen

$$\frac{\partial(u,y)}{\partial(x,y)} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_y \qquad \frac{\partial(x,v)}{\partial(x,y)} = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_x$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -\frac{\partial(v,u)}{\partial(x,y)} = -\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,x)} \qquad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)} = \frac{\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}} .$$

(b) Es sei nun ein funktionaler Zusammenhang zwischen x und y durch $\phi(x,y)$ =const= z gegeben, der eine Abhängigkeit $y = y(x)$ herstellt. Zeigen Sie, daß dann gilt:

$$\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_\phi = \left(\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_\phi\right)^{-1} , \qquad \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_\phi = -\frac{\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_y}{\left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_x} .$$

(Bem.: Oft schreiben wir in obigen Beziehungen einfach $z = z(x,y)$ und ersetzen ϕ überall durch z).

(c) Wir betrachten nun drei Variablen, die eine Bedingung $F(x,y,z) = 0$ erfüllen, sowie zwei der Variablen eine weitere Bedingung $w = w(x,y)$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\left.\frac{\partial x}{\partial w}\right|_z = \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z \left.\frac{\partial y}{\partial w}\right|_z , \qquad \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z = \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_w + \left.\frac{\partial x}{\partial w}\right|_y \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_z .$$