Übungen zu Moderne Theoretischen Physik III SS 16

Prof. Dr. A. Shnirman
PD Dr. B. Narozhny, P. Schad

Blatt 7
Besprechung: Freitag, 03.06.2016

---

1. Fermigas bei $T = 0$ (20 Punkte, schriftlich)

Gegeben sei ein Gas aus N punktförmigen fermionischen Teilchen mit der Masse m und mit Spin 1/2. Die fermionischen Teilchen befinden sich in einem Volumen $V = L^3$ bei Temperatur $T = 0$, bei der die Zustände bis zu einem Grenzimpuls p_F (Grenzenergie ϵ_F) besetzt sind. Betrachten Sie die folgenden beiden Situationen:

(a) Nichtrelativistische fermionische Teilchen: die Energien der Teilchen sind gegeben durch $\epsilon(\boldsymbol{k}) = \frac{\hbar^2 \boldsymbol{k}^2}{2m}$,

(b) Ultrarelativistisches Fermigas: die Energien sind gegeben durch $\epsilon(\boldsymbol{k}) = c\hbar|\boldsymbol{k}|$, der Massebeitrag zu den Energien wird vernachlässigt.

Bestimmen Sie in beiden Fällen die Fermienergie ϵ_F, den Fermiimpuls p_F, die innere Energie U und den Druck $P = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_N$ als Funktion von N und V.

2. Statistik idealer (Quanten-) Gase (30 Punkte, schriftlich)

Betrachten Sie ein System aus N Teilchen, die M entartete Zustände der Energie ϵ einnehmen können. Die Zahl $\Gamma(N, M)$ gibt an, auf wie viele (unterschiedliche) Möglichkeiten die Teilchen auf die Zustände verteilt werden können. Damit ist $\Gamma(N, M)$ auch die Anzahl möglicher Vielteilchenzustände. Sowohl die Anzahl der Teilchen als auch die Anzahl der Zustände sollen gro sein, $N \gg 1,\ M \gg 1$. Betrachten Sie die folgenden drei Szenarien:

(a) die Teilchen sind klassische, ununterscheidbare Teilchen,

(b) die Teilchen sind Bosonen,

(c) die Teilchen sind Fermionen (Annahme $N \leq M$).

Bestimmen Sie für alle drei Szenarien $\Gamma(N, M)$, die kanonische Zustandssumme Z_K, die freie Energie $F(T, N, M)$ und das chemische Potential $\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,M}$.

3. Chemisches Potential eines zweidimensionalen Elektronengases
(25 Punkte, mündlich)

Berechnen Sie für ein nichtrelativistisches Elektronengas in zwei Dimensionen (Teilchenzahl N, Fläche A, Energien $\epsilon = (\hbar|\boldsymbol{k}|)^2/(2m)$) das chemische Potential μ als Funktion der Temperatur T und der Dichte N/A. Diskutieren Sie die Grenzfälle $k_\mathrm{B}T \ll \epsilon_F$ und $k_\mathrm{B}T \gg \epsilon_F$ ($\epsilon_F \equiv \mu(T = 0)$). Für welche Temperatur wird $\mu = 0$? Skizzieren Sie $\mu(T)$.

Hinweis: Das Integral $\int_a^b \mathrm{d}x \frac{1}{(e^x+1)}$ kann mit Hilfe der Substitution $e^x = t$ exakt berechnet werden.

4. Planckverteilung und Strahlungsdruck (25 Punkte, mündlich)

In einen Hohlraum wird ein perfekter schwarzer Körper eingebracht. Über Absorption und Wärmestrahlung (Vernichtung und Erzeugung von Photonen) stellt sich ein Gleichgewicht zwischen dem schwarzen Körper und den Photonen (der Strahlung) im Hohlraum ein. Da die Teilchenzahl variabel ist muss das Problem großkanonisch behandelt werden. Bei nicht erhaltener Teilchenzahl ist $\mu = 0$, was später in der Vorlesung gezeigt wird. Die Energie der Photonen ist $\epsilon = c\hbar|\boldsymbol{k}|$.

(a) Wie sieht die Verteilung $n(|\boldsymbol{k}|)$ aus? Berechnen Sie zunächst die Photonendichte. Finden Sie dann die durchschnittliche Anzahl von Photonen, die innerhalb eines Zeitintervalls dt auf einem Oberflächenelement dS des schwarzen Körpers auftreffen.

(b) Jedes Photon, das auf den schwarzen Körper auftrifft, wird absorbiert und überträgt seinen Impuls $\vec{p}$. Finden Sie den mittleren Impuls pro Flächenelement dS und Zeitintervall dt, der durch die Photonen auf den Körper übertragen wird. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Strahlungsdruck $p = \frac{\pi^2}{45}\frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3}$. Wie erklären Sie den Unterschied?

Hinweise: Zur Berechnung des Integrals in (a):

$$\frac{1}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3)$$

$\zeta(3)$ ist die Apéry-Konstante, der Wert der Riemannschen ζ-Funktion bei 3.

Zum Integral in (b):

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}.$$

Mit ,,schriftlich" gekennzeichnete Aufgaben sind handschriftlich zu bearbeiten und bis Mittwoch (vor der Besprechung), 10 Uhr, in den dafür vorgesehenen Kasten einzuwerfen.