Übungen zu Moderne Theoretischen Physik III SS 16

Prof. Dr. A. Shnirman
PD Dr. B. Narozhny, Dr. P. Schad

Blatt 9
Besprechung: Freitag, 17.06.2016

---

1. Ideales Fermigas: spezifische Wärme bei niedrigen Temperaturen

(25 Punkte, schriftlich)

Betrachten Sie ein ideales Fermigas aus N punktförmigen Teilchen der Masse m und Spin $s = \frac{1}{2}$ in einem dreidimensionalen Volumen V. In der Vorlesung wurde der folgende Ausdruck für das großkanonische Potential Ω für das ideale Fermigas im Regime $k_B T \ll \epsilon_F$ hergeleitet:

$$\Omega(T, V, \mu) = -(2s+1)V \left[b(\mu) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \nu(\mu) + \dots \right] \tag{1}$$

mit der Zustandsdichte $\nu(\epsilon) = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{\epsilon}}{4\pi^2}$ (für $\epsilon > 0$). Die Größe $b(\epsilon)$ ist definiert als

$$b(\epsilon) \equiv \int_{-\infty}^{\epsilon} d\epsilon_1 a(\epsilon_1) \qquad \text{mit} \qquad a(\epsilon) \equiv \int_{-\infty}^{\epsilon} d\epsilon_1 \nu(\epsilon_1) \, . \tag{2}$$

Das Fermigas bei $T = 0$ wird auch als entartetes Fermigas bezeichnet. In dieser Aufgabe soll die spezifische Wärmekapazität des ,,fast entarteten" Fermigases, bei $k_B T \ll \epsilon_F$, berechnet werden.

(a) Zeigen Sie, dass sich aus (1) die Teilchenzahl $N(T, V, \mu)$

$$N(T, V, \mu) = \frac{(2s+1)V}{6\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \left[\mu^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi^2}{8\sqrt{\mu}} (k_B T)^2 + \dots \right] . \tag{3}$$

ergibt. Drücken Sie Gl. (3) mit Hilfe der Fermienergie ϵ_F aus. Leiten Sie daraus einen Näherungsausdruck für das chemische Potential $\mu(T)$ Regime $k_B T \ll \epsilon_F$ her, inklusive der ersten Korrektur in $(k_B T)/\epsilon_F$.

(b) Bestimmen Sie die spezifische Wärme

$$C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,N} \tag{4}$$

aus dem großkanonischen Potential Ω, Gl. (1), inklusive der ersten Korrektur in $(k_B T)/\epsilon_F$. Verwenden Sie dazu das Ergebnis aus Teilaufgabe (a).

2. Ideales Fermigas: Zustandsgleichung und Entropie

(25 Punkte, schriftlich)

Für das ideale Fermigas in drei Dimensionen wurde in der Vorlesung ein exakter Ausdruck für das großkanonische Potential gezeigt:

$$\Omega(T, V, \mu) = -\frac{(2s+1)k_B T V}{\lambda_T^3} f_{5/2}(e^{\beta\mu}) \tag{5}$$

(a) Berechnen Sie die Entropie $S(T,V,\mu)$. Zeigen Sie dann mit Hilfe von thermodynamischen Relationen, dass das Fermigas die Zustandsgleichung

$$PV = \frac{2}{3}U \tag{6}$$

erfüllt.

(b) Betrachten Sie $\Omega(T,V,\mu)$ im Regime $k_B T \gg \epsilon_F$ (klassischer Grenzwert) und finden Sie einen Ausdruck für $\mu(T,V,N)$ bei hohen Temperaturen. Wie verhält sich die Entropie S als Funktion von T, V und N (statt μ) bei hohen Temperaturen?

Hinweis: Die Funktionen $f_s(z)$ sind definiert durch

$$f_s(z) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t/z+1}\, dt, \qquad (s>0), \tag{7}$$

Sie können durch Polylogarithmen ausgedrückt werden: $f_s(z) = -\mathrm{Li}_s(-z)$. Verwenden Sie die Eigenschaften dieser Funktionen.

3. Zustandsdichte in niedrigen Dimensionen (5 Punkte, mündlich)

In der Vorlesung haben Sie die Zustandsdichte des idealen Fermigases kennengelernt. Berechnen Sie nun die Zustandsdichte

$$\nu(\varepsilon) = \frac{(2s+1)}{V} \sum_{\mathbf{k}} \delta(\varepsilon - \varepsilon(\mathbf{k}))$$

freier, nichtrelativistischer Teilchen mit $s = 1/2$ in niedrigen Dimensionen $d = 1, 2$.

4. Fermionen mit Spin-Bahn-Kopplung (45 Punkte, mündlich)

Ein einfaches Modell, das eine Spin-Bahn-Kopplung freier Spin-1/2-Teilchen in 2 Dimensionen beschreibt, ist durch den folgenden Hamiltonoperator gegeben:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + \alpha \hat{\boldsymbol{p}} \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \tag{8}$$

mit einem Vektor $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ aus Pauli-Matrizen σ_x, σ_y. Betrachten Sie das großkanonische Ensemble bei $T = 0$, und nehmen Sie an, dass $\mu > 0$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenenergien von (8). Führen Sie eine Quantenzahl $\gamma = \pm 1$ ein (Chiralität), um die Eigenenergien $\epsilon_{p,\gamma}$ zu charakterisieren.

(b) Berechnen Sie die Teilchenzahl N mit

$$N(T=0,V,\mu) = V \sum_{\gamma}^{\pm 1} \int \frac{d^2p}{(2\pi\hbar)^2} \Theta(\mu - \epsilon_{p,\gamma}). \tag{9}$$

Bei welchem Wert der Dichte n_c ($n = \frac{N}{V}$) wird $\mu = 0$? Was passiert mit μ bei $n < n_c$?

(c) Finden Sie die Zustandsdichte $\nu(\epsilon_\gamma)$.

(d) Benutzen Sie die Zustandsdichte um bei kleinen, endlichen Temperaturen $k_B T \ll \mu$ die Energie E und daraus die spezifische Wärme

$$c_{V,\mu} = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{V,\mu} \tag{10}$$

bei festgehaltenem $\mu > 0$ zu berechnen.

Mit ,,schriftlich" gekennzeichnete Aufgaben sind handschriftlich zu bearbeiten und bis Mittwoch (vor der Besprechung), 10 Uhr, in den dafür vorgesehenen Kasten einzuwerfen.