Moderne Theoretische Physik III (Theorie F – Statistische Mechanik) SS 17

Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Janina Klier

Blatt 2
Besprechung: 05.05.2017

---

1. Carnot-Prozess für das ultrarelativistische Bosegas:

$(10 + 15 + 5 + 5 = 35$ Punkte$)$

Wir betrachten ein ultrarelativistisches Gas von Bosonen (Temperatur T, Volumen des Systems V). Die innere Energie U und der Druck p dieses Systems erfüllen

$$U = \sigma V T^4, \qquad p = U/3V, \tag{1}$$

wobei σ die Stefan-Boltzmann Konstante bezeichnet. Das chemische Potential des ultrarelativistischen Bosegases verschwindet: $\mu = 0$.

(a) Bestimmen Sie die Entropie des Systems $S(T, V)$ als Funktion von Temperatur und Volumen, indem Sie von der inneren Energie $U(T, V)$ ausgehen. Geben Sie die Abhängigkeit des Drucks vom Volumen in einem adiabatischen Prozess an.

(b) Analysieren Sie einen geschlossenen Carnotzyklus für das ultrarelativistische Bosegas. Berechnen Sie Arbeit, die vom System in jedem Schritt geleistet wird und die Wärme, die vom System während der isothermen Expansion (Kompression) aufgenommen (abgegeben) wird. Bestimmen Sie den Wirkungsgrad der Carnot-Maschine als Funktion von T_1 und T_2.

(c) Berechnen Sie das Integral

$$\Delta S = \oint \frac{\delta Q}{T}, \tag{2}$$

über den Carnot-Prozess für das ultrarelativistische Bosegas. Dabei bezeichnet δQ die infinitesimale Menge an Wärme die vom System aufgenommen wird und das Integral läuft über den kompletten Carnot-Prozess.

(d) Untersuchen Sie denselben Carnot-Prozess in der umgekehrten Richtung (die isotherme Kompression des Gases findet bei der höheren Temperatur T_1 statt). Was ist der Zweck dieses Prozesses? Berechnen Sie die Wärme, die im Prozess aus dem kalten Wärmebad entnommen wird und vergleichen Sie sie mit der Arbeit, die von einer externen Maschine geleistet wird um den Prozess zu durchlaufen.

2. Elastisches Band (5 Punkte +15 Bonuspunkte)

Für ein elastisches Band der Länge L bei der Temperatur T und unter der Spannung σ (nicht mit der Stefan-Boltzmann-Konstante aus Aufgabe 1 zu verwechseln) wurden experimentell folgende Beziehungen gemessen

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_L = \frac{aL}{L_0}\left[1 - \left(\frac{L_0}{L}\right)^2\right], \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial L}\right)_T = \frac{aT}{L_0}\left[1 + \left(\frac{L_0}{L}\right)^2\right]. \tag{4}$$

Hier bezeichnet L_0 die Länge des ungedehnten Bands, die als temperaturunabhängig angenommen wird, und a eine Konstante ist.

(a) Bestimmen Sie die Zustandsgleichung des Systems, d.h. finden Sie die Spannung als Funktion von T und L.

(b) Das Band werde nun von einer anfänglichen Länge L_0 und Temperatur T_0 auf adiabatische und reversible Weise auf eine finale Länge L_1 gedehnt. Berechnen Sie die finale Temperatur T_1.

Hinweis: die Änderung der inneren Energie U des Bandes ist durch $dU = TdS + \sigma dL$ gegeben, wobei σdL die Arbeit bezeichnet, die verrichtet wird um das Band um die Strecke dL zu dehnen. Es gilt:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_T = -\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_L. \tag{5}$$

Nehmen Sie an, dass die spezifische Wärme bei konstanter Länge eine lineare Funktion von T ist.

3. Wärmeaustausch mit einem Reservior (15 Punkte)

Wir betrachen ein System O_2, das mit einem Wärmereservior O_1 mit Temperatur T_1 in Kontakt gebracht wird. Die Volumina beider Systeme seien konstant. Teilchenaustausch zwischen O_1 und O_2 sei nicht möglich. Die Änderung der inneren Energie von O_1 erfolgt nur durch Wärmeaustausch, $\delta U_1 = \delta Q_1 = T_1\, dS_1$. Das Reservoir O_1 sei so groß, dass T_1 sich beim Wärmeaustausch praktisch nicht ändert, und somit Zustandsänderungen von O_1 reversibel sind. Das Gesamtsystem aus O_2 und O_1 sei abgeschlossen. Welche Bedeutung hat das für eine infinitesimale Energieänderung der Teilsysteme? Geben Sie die einzelnen Beiträge allein durch die Änderung der extensiven Variablen U_2 und S_2 an, und zeigen Sie, dass

$$dU_2 - T_1\, dS_2 \leq 0 \tag{6}$$

gilt.