Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik III (Theorie F – Statistische Mechanik) **SS 17**

Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Janina Klier

Blatt 1
Besprechung: 28.04.2017

Mathematische Grundlagen

1. Stirlingsche Formel (Hausaufgabe): (5+5+5=15 Punkte)

(a) Beweisen Sie die Stirlingsche Näherungsformel

$$N! \approx \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N, \quad N \gg 1. \tag{1}$$

Benutzen Sie hierzu die Definition von $N!$ über die Gammafunktion

$$N! = \Gamma(N+1) = \int_0^\infty dx\, x^N\, e^{-x} \tag{2}$$

und berechnen Sie das Integral näherungsweise mit der Sattelpunktsmethode. Zeigen Sie hierzu, dass der Logarithmus des Integranden ein Maximum bei $x = N$ besitzt und entwickeln Sie bis zur quadratischen Ordnung in der Variablen $x - N$. Dies liefert ein leicht auszurechnendes Gaußsches Integral.

(b) Berechnen Sie die Näherung des Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{3}$$

für den Fall $n \gg 1$ und $k = xn$ mit $0 < x < 1$.

(c) Bei wie vielen Studenten ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Studenten am gleichen Tag Geburtstag haben, gerade größer als 99/100?

. . . **bitte wenden** . . .

Aufgaben 2,3 und 4 sind mündliche Bonusaufgaben, die in den Übungsgruppen besprochen werden.

2. Integrabilitätsbedingung: (10 Bonuspunkte)

Eine Form

$$\delta\omega = f(x,y)dx + g(x,y)dy$$

heißt integrabel wenn eine Funktion $h(x,y)$ existiert, deren vollständiges Differential dh identisch mit $\delta\omega$ ist. Das ist genau dann der Fall, wenn die Integrabilitätsbedingung

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_x = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_y$$

erfüllt ist. Im Falle von nur zwei unabhängigen Variablen kann man immer einen integrierenden Faktor $\alpha(x,y) \neq 0$ finden, sodass die Form $\alpha\delta\omega$ integrabel ist.
Testen Sie, ob für die folgenden Fälle

(a) $f(x,y) = 3x^2 - 2xy - y^2 \quad \text{und} \quad g(x,y) = -x^2 - 2xy + y^2$,

(b) $f(x,y) = 3x + y \quad \text{und} \quad g(x,y) = -x - 3y$,

$\delta\omega$ integrabel ist, und bestimmen Sie $h(x,y)$. Finden Sie dazu im Falle einer nichtintegrablen Form einen geeigneten integrierenden Faktor $\alpha(x,y) = Ax + By$.

3. Legendre-Transformation: ($5 + 5 = 10$ Bonuspunkte)

Gegeben sei eine Kurve $U(S)$ in einem Bereich, in welchem sich das Vorzeichen ihrer Krümmung nicht ändert. Geben Sie eine eindeutige Darstellung der Kurve, indem Sie anstelle der Koordinaten S und U die Steigung $T = dU/dS$ sowie den U-Achsenabschnitt F der Tangente an jeden Kurvenpunkt als unabhängige Variable verwenden. Die Funktion $F(T)$ wird als Legendre-Transformierte von $U(S)$ bezeichnet. Auflösen der (obigen) Beziehung $T = T(S)$ nach S definiert eine Funktion $S = S(T)$.

(a) Zeigen Sie, dass die vollständigen Differentiale von $U(S)$ und $F(T)$ durch

$$dU(S) = T(S)dS \qquad \text{und} \qquad dF(T) = -S(T)dT$$

gegeben sind.

(b) Gegeben sei nun eine Fläche $U(S,V)$ mit positiver Steigung bezüglich S, negativer Steigung bezüglich V und unveränderlichem Vorzeichen der Krümmung. Führen Sie jeweils eine Legendre-Transformation für konstant gehaltenes V bzw. für konstant gehaltenes S durch. Die Steigungen seien durch $T = \partial U/\partial S|_V$ sowie $-P = \partial U/\partial V|_S$ gegeben. Auflösen von $T(S,V)$ nach S und $P(S,V)$ nach V definiert Funktionen $S(T,V)$ und $V(S,P)$. Bestimmen Sie analog zu oben die vollständigen Differentiale der Legendretransformierten $F(T,V)$ und $H(S,P)$.

4. Funktionaldeterminantenkalkül: (10 + 8 + 12 = 30 Bonuspunkte)

Gegeben seien die Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ der unabhängigen Variablen x und y. Als Funktionaldeterminante (Jacobi-Determinante) bezeichnet man das Gebilde

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_y & \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_x \\ \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_y & \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_x \end{pmatrix} .$$

(a) Zeigen Sie, dass folgende Relationen gelten:

$$\frac{\partial(u,y)}{\partial(x,y)} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_y , \qquad \frac{\partial(x,v)}{\partial(x,y)} = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_x , \tag{4}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -\frac{\partial(v,u)}{\partial(x,y)} = -\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,x)} , \tag{5}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right]^{-1} . \tag{6}$$

(b) Es sei nun ein funktionaler Zusammenhang zwischen x und y durch

$$\phi(x, y) = \text{const}$$

gegeben, der eine Abhängigkeit $y = y(x)$ herstellt. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_\phi = \left(\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_\phi\right)^{-1}, \qquad \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_\phi = -\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_y \left(\left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_x\right)^{-1} . \tag{7}$$

(c) Betrachten Sie nun die drei Variablen x, y und z, die durch die Bedingung

$$F(x, y, z) = 0$$

miteinander in Zusammenhang stehen. Durch Auflösen der Gleichung $F = 0$ nach x, y und z erhalten wir die drei Funktionen $x(y, z)$, $y(x, z)$ und $z(x, y)$. Nehmen Sie weiter an, dass es einen funktionalen Zusammenhang $w = w(x, y)$ gibt. Zeigen Sie, dass die Ableitungen der Funktionen folgende Relationen erfüllen:

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_z \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_x \left.\frac{\partial x}{\partial z}\right|_y = -1, \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial x}{\partial w}\right|_z = \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z \left.\frac{\partial y}{\partial w}\right|_z, \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z = \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_w + \left.\frac{\partial x}{\partial w}\right|_y \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_z. \tag{10}$$