Moderne Theoretische Physik III (Theorie F – Statistische Mechanik) SS 17

Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Janina Klier

Blatt 3
Besprechung: 12.05.2017

---

1. Thermodynamische Relationen: $(6+4+5+5=20$ Punkte$)$

Auf diesem Übungsblatt verwenden wir die Notation aus der Vorlesung:

$$\text{Jacobi-Matrix:}\quad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_y & \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_x \\ \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_y & \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_x \end{pmatrix},$$

$$\text{Jacobi-Determinante:}\quad \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_y \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_x - \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_x \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_y .$$

(a) Beweisen Sie die Maxwell-Relation aus Aufgabe 2b von Blatt 2:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_T = -\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_L . \tag{1}$$

Berechnen Sie die Jacobi-Determinante $\left|\frac{\partial(T,S)}{\partial(\sigma,L)}\right|$.

(b) Leiten Sie den folgenden Zusammenhang zwischen Wärmekapazitäten her:

$$c_p - c_V = -T\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V^2}{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T} . \tag{2}$$

(c) Zeigen Sie, dass für ein magnetisches System (Magnetisierung M) im äußeren Magnetfeld B die Relation

$$\frac{c_M}{c_B} = \frac{\chi_S}{\chi_T} \tag{3}$$

gilt, wobei

$$c_M = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_M , \quad c_B = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_B , \quad \chi_S = \left(\frac{\partial M}{\partial B}\right)_S , \quad \chi_T = \left(\frac{\partial M}{\partial B}\right)_T .$$

(d) Beweisen Sie die Relation

$$c_B - c_M = T\frac{\alpha_B^2}{\chi_T} \tag{4}$$

mit dem Temperaturkoeffizienten der Magnetisierung

$$\alpha_B = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_B .$$

2. Behälter mit zwei Kammern (5+10=15 Punkte)

Ein thermisch abgeschlossener Behälter ist durch eine Trennwand in zwei Kammern unterteilt. Beide Kammern enthalten ideale Gase mit konstanter Wärmekapazität c_V. Die eine Kammer enthält N_A Teilchen bei der Temperatur T_A und dem Druck p_A, die andere N_B Teilchen bei der Temperatur T_B und dem Druck p_B.

(a) Nun werde die thermische Isolierung der Trennwand entfernt und die Trennwand verschiebbar gemacht. Berechnen Sie den Druck p und die Temperatur T des Systems im Gleichgewicht.

(b) Anschließend wird die Trennwand entfernt. Berechnen Sie die Änderung ΔS der Gesamtentropie aufgrund der Mischung für die beiden Fälle: (i) verschiedene Gase; (ii) identische Gase.

3. Gauß-Verteilung für zwei Variablen (3+3+4+5=15 Punkte)

Die Gauß-Verteilung $\rho(X_1, X_2)$ für die zwei stochastischen Variablen X_1 und X_2 sei durch

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\sqrt{\det A}}{(2\pi)} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}(X_i - a_i)\; A_{ij}\; (X_j - a_j)\right] \tag{5}$$

definiert. Die 2×2 Matrix A ist symmetrisch und positiv definit.

(a) Geben Sie die reduzierte Verteilungsfunktion

$$\rho_1(X_1) = \int dX_2\; \rho(X_1, X_2) \tag{6}$$

an.

(b) Finden Sie die Kovarianz

$$\mathrm{cov}(X_1, X_2) = \langle (X_1 - \langle X_1\rangle)(X_2 - \langle X_2\rangle)\rangle. \tag{7}$$

(c) Bestimmen Sie das Moment $\langle X_1^2 X_2^2\rangle$ der Verteilung.

(d) Berechnen Sie den Mittelwert der Exponentialfunktion

$$f(\beta) = \langle \exp\left[-\beta(X_1 + X_2)\right]\rangle\,. \tag{8}$$