Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

**Moderne Theoretische Physik III (Theorie F – Statistische Mechanik) SS 17**

**Prof. Dr. Alexander Mirlin**
**PD Dr. Igor Gornyi, Janina Klier**

**Blatt 6**
**Besprechung: 02.06.2017**

---

**1. Ideales Gas im Schwerefeld:** (5+10=15 Punkte)

Betrachten Sie ein Boltzmann-Gas aus $N$ Teilchen der Masse $m$ im Gravitationsfeld der Erde. Das Gas wird durch die Hamilton-Funktion

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} + mgz_i \right). \tag{1}$$

beschrieben. Nehmen Sie an dass die Erdoberfläche bei $z = 0$ flach ist und für alle Teilchen $z_i > 0$ gelte. Das Gas befinde sich in einem Zylinder der Höhe $h \gg k_B T/(mg)$ und mit Radius $R$.

(a) Bestimmen Sie die Zustandssumme $Z$ und die freie Energie $F$ des Gases unter der Annahme dass die Temperatur $T$ unabhängig von $z$ ist.

(b) Finden Sie die Dichte des Gases $\rho(\vec{r})$ und den Druck $P(z)$ als Funktion der Höhe $z$.

**2. Zweiatomiges Gas:** (8+12+10=30 Punkte)

Betrachten Sie ein ideales klassisches Gas von $N$ nichtwechselwirkenden Molekülen im dreidimensionalen Volumen $V$ bei der Temperatur $T$. Jedes Molekül besteht aus zwei punktartigen Atomen mit den Massen $m_1$ und $m_2 \neq m_1$, die durch ein Potential

$$U_a(r) = \frac{m\omega^2}{2}(r-a)^2, \qquad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{2}$$

wechselwirken, wobei $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ der Abstand zwischen den Atomen ist.

(a) Zeigen Sie, dass für $k_B T \ll m\omega^2 a^2$ die Schwankungen der Atomabstände in Molekülen klein sind. Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme $Z$ des Gases für diesen Grenzfall.

(b) Berechnen Sie dadurch die freie Energie $F$, die Entropie $S$ und die Wärmekapazität $c_V$ des Systems.

(c) Betrachten Sie nun die Rotationsfreiheitsgrade quantenmechanisch. Die Rotationsenergie eines Moleküls sei durch konstantes Trägheitsmoment $\Theta =$ konst. gegeben:

$$E_l^{\mathrm{Rot}} = \frac{\hbar^2}{2\Theta} l(l+1), \quad l = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

mit der Drehimpulsquantenzahl $l$.

Bestimmen Sie die zugehörige kanonische Zustandssumme (berücksichtigen Sie die Entartung: $m = -l, \ldots, l$)

$$Z^{\mathrm{Rot}} = (Z_1^{\mathrm{Rot}})^N, \qquad Z_1^{\mathrm{Rot}} = \sum_{l,m} \exp\left( -\frac{E_l^{\mathrm{Rot}}}{k_B T} \right) \tag{4}$$

in der Näherung tiefer ($k_B T \ll \hbar^2/\Theta$) und hoher ($k_B T \gg \hbar^2/\Theta$) Temperaturen. Berechnen Sie damit die Beiträge der Rotationsfreiheitsgrade zur innere Energie $U$ und zur Wärmekapazität $c_V$ des Gases für $T \to 0$ und $T \to \infty$.

**3. Logarithmisches Spektrum:** (10 Punkte)

Betrachten Sie ein quantenmechanisches System aus $N$ nichtwechselwirkenden Teilchen von denen jedes ein Energiespektrum der Form

$$E_n = \Delta \ln(n) , \quad n = 1, ..., \infty \tag{5}$$

besitzt. Berechnen Sie die Zustandssumme $Z$ und bestimmen Sie die führende Temperaturabhängigkeit der Entropie $S$ und der Wärmekapazität $c_V$ für Temperaturen $T$ nahe bei $\Delta/k_B$. Diskutieren Sie das Ergebnis. Was passiert im Fall $T > \Delta/k_B$?